Beiträge zur Matrizenrechnung

mit Anwendung auf die Relativitätstheorie.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

vorgelegt von

Johannes Stein
aus Glogau (Schlesien).

Tübingen
Druck von H. Laupp jr
1914.

Von der Fakultät angenommen

am 24. Juli 1914

Referent: Prof. Dr. v. Brill

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Alexander v. Brill

und meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet.

Inhalt.

Seite

I. Grundlagen der reellen Symbolik.

Art. 1. Grundlagen der üblichen Matrizenrechnung 3
„ 2. Bestimmung einer Matrizen-Symbolik ohne imaginäre Größen 5
„ 3. Folgerungen für die Form der Lorentztransformationen . . . 7
„ 4. Grundlagen der neuen Matrizenrechnung 8

II. Reelle Symbolik in Beziehung zur Relativitätstheorie.

a) Gewöhnliche Matrizen.

Art. 5. Definition der Matrizen I. und II. Art 12
„ 6. Einfache Matrizen I. Art 13
„ 7 Einfache Matrizen II. Art 14
„ 8. Zusammengesetzte Matrizen I. und II. Art 16
„ 9. Zusammengesetzte Vektoren II. Art ($\mathfrak{A}$) und Tensoren ($\mathfrak{T}$) . 17
„ 10. Lorentz-Invarianten von Vektoren und Tensoren 18
„ 11. Auflösung einiger symbolischer Gleichungen 20

b) Operationsmatrizen.

„ 12. Differentialmatrizen 23
„ 13. Die allgemeine Weltlinie, ihre Geometrie und dreidimensionale Interpretation 25

c) Produkte aus gewöhnlichen und Operations-Matrizen.

Art. 14. Erklärung von Vektoroperationen durch Matrizenprodukte und ihr Verhalten zur Lorentztransformation 30
„ 15. Allgemeine Relationen zwischen den Operationen div, grad, rot, $\square$ 35

d) Spezielle Matrizen.

Art. 16. Ruhmatrizen und die Matrix ν 37

III. Anwendung der reellen Symbolik auf Probleme der Relativitätstheorie.

a) Die Elektrodynamik ponderabler bewegter Substanzen.

Art. 17. Die elektromagnetischen Grundgleichungen 39
„ 18. Die Zusatzbedingungen 40

Seite

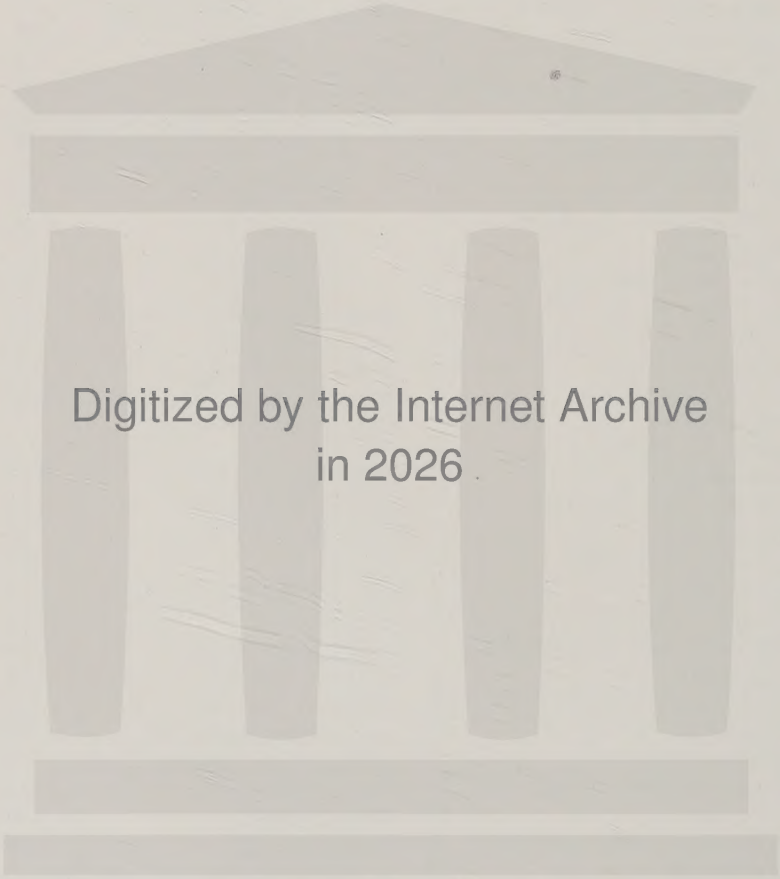
Art. 19. Der elektrodynamische Welttensor 43
„ 20. Feldvektor, Verschiebungsvektor und Welttensor als Funktionen der Minkowskischen Vektoren E, H und S 46
„ 21. Die ponderomotorischen Kräfte 49
„ 22. Die Berechnung der Matrix $\mathfrak{f}$ 50
„ 23. Explizite Darstellung der ponderomotorischen Kraft in besonderen Fällen 53
„ 24. Die Berechnung und Bedeutung der Energie Q 55
„ 25. Analogien zwischen vier- und dreidimensionalen Größen der Elektrodynamik 57

b) Die Lewis-Wilsonsche reelle Vektoranalysis.

Art. 26. Erklärung der Lewis-Wilsonschen Einheitsvektoren k_a . . . . durch Matrizen 58

Erklärungen und Bezeichnungen.

Ableitung ($\dot{M}$) einer Matrix . . 24
adjungierte Matrix (^{c}M) . . . 10
alternierende Matrix ($\mathfrak{A}$) . . . 14
Beschleunig. (p Vierer-, $\mathfrak{P}$ Sechser-) 28
Bogenelement ($d\sigma$, vierdim.) . . 26
Deformationstensor ($\mathfrak{T}$) 33
Diagonalmatrix (ϱ) 8
Differentialmatrix ($\frac{d}{d\sigma}$, ∂, δ) . . 23
Divergenz (div) 30
Division zweier Matrizen . . . 4
dualer Vektor II. Art ($\mathfrak{A}^*$) . . . 15
Eigenzeit (τ) 27
Einheitsmatrix (e, 1) 8/5
Feldvektor ($\mathfrak{F}$, vierdim.) . . . 40
Funktionalmatrix (k) 25
Geradheit (d. Weltlinie) . . . 29
Geschwindigkeit (q Vierer-) . . 27
Gleichheit zweier Matrizen . . 3
Gradient ($grad$) 30
Hauptnormale (vierdim.) . . . 26
invariant (inv) 18
Joulesche Wärme (r) 56
Koeffizienten (a_{ik}) (-Matrix, -Bedingungen) 7
Kraft (f Vierer-, $\mathfrak{F}$ ponderomotor.) 50
Krümmung (f), -Radius (R) . . 27
Lorenztransformation 7
Matrix I. Art (M_I), II. Art (M_{II}) 12
M' 12
Multiplikation zweier Matrizen . 8
normal ($\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$) 43
Operationsmatrizen ($\frac{d}{d\sigma}$, ∂, δ) . . 23
Potenz einer Matrix 9
□ 30
reziproke Matrix (M^{-1}) 4
Rotation (rot) 30
Ruh-Induktion (D elektr., B magn.) 42
-Kraft (E elektr., H magn.). 42
-Leitungsstrom (J) . . . 42
-Matrix (M^0) 37
-Strahl (S) 43
-Transformation 37
-Wärme (γ) 56
Schmiegungsebene (vierdim.) . 26
Sechservektor ($\mathfrak{A}$) 14
senkrechte Vektoren I. Art . . 43
Strom ($\mathfrak{s}$ Vierer-, $\mathfrak{S}$ Sechser-) 39/40
Summe zweier Matrizen . . . 3
Summenzeichen ($\sum_i$, Σ) . . . 8/16
symmetrische Matrix 14
Tangente (vierdim.) 26
Tensor ($\mathfrak{T}$) 14
transponierte Matrix ($\bar{M}$) . . . 4
transponieren 18
unabhängige Matrizen 36
Vektor I. Art ($\mathfrak{a}$) 13
Vektor II. Art ($\mathfrak{A}$) 14
Verschiebungsvektor ($\mathfrak{B}$) . . . 40
vertauschbare Matrizen 3
Vierervektor ($\mathfrak{a}$) 13
Welt (, -Linie) 25
Welttensor ($\mathfrak{T}$) 43
α, β, γ . . . bezieht sich auf den Literaturnachweis 64


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553613_0009

Einleitung.

Seit Minkowski dem Relativitätsprinzip eine mathematische Fassung gegeben hat, die erst seiner Bedeutung gerecht wird, schreibt man allerorts die Gleichungen der Relativitätstheorie in vierdimensionaler Form an. Dabei spielt die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ eine wesentliche Rolle. Aber sie erschwert die Uebersicht über die Realitätsverhältnisse der vierdimensionalen Größen und wird beim Uebergang vom vierdimensionalen zum dreidimensionalen Raum, wo es sich nur um reelle Größen handelt, stets als lästig empfunden. Lewis und Wilson [*i*] haben deshalb eine Darstellung des Relativitätsprinzips gegeben, die von der imaginären Einheit frei ist; sie baut sich auf einer eigentümlichen Verbindung von Euklidischer und Nichteuklidischer Geometrie auf, für die eine gemeinsame Vektoranalysis konstruiert wird.

Die vorliegende Arbeit verfolgt denselben Zweck, nämlich die prinzipielle Beseitigung aller imaginären Größen, verzichtet aber grundsätzlich nicht auf die Vorzüge einerseits der Minkowskischen Symbolik, andrerseits der vierdimensionalen Vektoranalysis [*γ*]. Hierzu war eine Umgestaltung der üblichen Matrizenrechnung nötig. Vor allem war das Produkt zweier Matrizen anders zu definieren. Da sich diese Aenderung auf alle Teile der Matrizenrechnung erstreckt, so mußten die Rechenvorschriften im einzelnen neu entwickelt werden. Dabei ergibt sich von selbst eine engere Verbindung zwischen vierdimensionaler Vektoranalysis und der Minkowskischen Symbolik. Die einschlägigen skalaren und vektoriellen Produkte werden durch Matrizenprodukte, und die differentiellen vektoranalytischen Beziehungen sämtlich durch einen einzigen Operator, die Matrix ∂ (Art. 12), erklärt, deren verschiedene Verbindungen mit anderen Matrizen M zu den Bezeichnungen div, grad, rot, $\square$ führen, die diejenigen der vierdimensionalen Vektoranalysis, z. B. Δw und Div, als besondere Fälle enthalten; sie er-

möglichen auch eine rationelle Schreibweise der vierdimensionalen Deformationsgrößen. Endlich läßt sich die Verwendbarkeit der Matrizenrechnung durch die Einführung der speziellen Matrix

$$\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

wesentlich steigern. Mit ihrer Hilfe wird unter anderem eine elegante Berechnung des elektrodynamischen Welttensors für ponderable bewegte Körper ermöglicht.

I. Grundlagen der reellen Symbolik.

Art. 1. Grundlagen der üblichen Matrizenrechnung.

Die übliche Matrizenrechnung geht von folgenden Annahmen aus [1]). Eine Matrix M vom 4. Grade ist durch Angabe ihrer 16 Elemente M_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ bestimmt:

$$M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{vmatrix}.$$

Zwei Matrizen M, N heißen *gleich*, in Zeichen $M = N$, wenn für alle i und k $M_{ik} = N_{ik}$ ist. Unter $M + N$ wird die Matrix mit den Elementen $M_{ik} + N_{ik}$ verstanden; MN ist die Matrix mit dem Element [2]) $\sum_j M_{ij} N_{jk}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ an der Stelle i, k, d. h. in der i-ten Zeile und der k-ten Kolonne. Sie entsteht durch bilineare Kombination der Zeilen von M mit den Kolonnen von N. Es zeigt sich, daß im allgemeinen $MN \neq NM$ ist. Ist im besonderen $MN = NM$, so heißen M und N *vertauschbar*. Eine Matrix von der Form

$$\begin{vmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varrho \end{vmatrix},$$

in welcher die Elemente der Hauptdiagonale $= \varrho$, die übrigen sämtlich Null sind, heißt eine Diagonalmatrix und wird mit ϱ bezeichnet. Sie ist mit jeder Matrix M vertauschbar, also $\varrho M = M\varrho$. Das Produkt ϱM enthält die Elemente ϱM_{ik}; da sie für $\varrho = 1$ mit M_{ik} übereinstimmen, wird die Matrix

1) Pascal [z], § 6.

2) Weiter unten als „ik-Element“ bezeichnet.

$$E = 1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Einheitsmatrix genannt:

$$EM = ME = 1 \cdot M = M \cdot 1 = M.$$

Mehrfaches Multiplizieren einer Matrix M mit sich selbst führt zu den Potenzen von M; demnach ist $M^2 = M \cdot M$, etc. M^0 steht für die Einheitsmatrix E. Unter M^{-1}, der *reziproken Matrix* von M, wird diejenige Matrix verstanden, die in beliebiger Folge mit M multipliziert die Einheitsmatrix liefert, also:

$$MM^{-1} = M^{-1}M = E = 1.$$

Sie existiert nur, wenn die aus den Elementen M_{ik} von M gebildete Determinante $|M|$ nicht verschwindet. Es wird M^{-2} durch $M^{-1} \cdot M^{-1}$ etc. $\cdots$ erklärt. Alle Potenzen von $M \cdots M^{-3}$, M^{-2}, M^{-1}, $M^0 = E$, $M^1 = M$, M^2, $\cdots$ sind, soweit sie existieren, unter einander vertauschbar.

An die Stelle der *Division* von M durch N tritt die Multiplikation mit der reziproken Matrix N^{-1}, wenn sie existiert. Die dabei möglichen Resultate sind: MN^{-1} oder $N^{-1}M$. Sind beide gleich, so kann man sie kurz durch $\frac{M}{N}$ ausdrücken.

Damit sind alle Rechnungsoperationen mit Matrizen erklärt. Werden die Zeilen und Kolonnen einer Matrix (spiegelbildlich) vertauscht, so entsteht die *transponierte Matrix* $\bar{M}$; sie hat also an der Stelle ik das Element M_{ki}. Die vorstehend erklärte Addition genügt dem kommutativen und dem assoziativen Gesetz:

$$M + N = N + M,$$
$$M + (N + R) = (M + N) + R,$$

die Multiplikation aber nur dem assoziativen und dem distributiven Gesetz:

$$(MN)R = M(NR),$$
$$M(N + R) = MN + MR,$$

nicht dem kommutativen:

$$MN \neq NM,$$

wenigstens nicht im allgemeinen. Man bestätigt leicht die Richtigkeit der Gleichung:

$$|MN| = |M| \cdot |N|,$$

wo $|M$ die Determinante der M_{ik} ist; ihr Inhalt ist der bekannte Determinantenmultiplikationssatz von Cauchy.

Art. 2. Bestimmung einer Matrizen-Symbolik ohne imaginäre Größen.

Ist durch rechtwinklige Raumkoordinaten xyz und durch den Lichtweg $u = ct$ als vierte Koordinate (wo t die Zeit ist, c die Lichtgeschwindigkeit) ein Koordinatensystem $xyzu$ gegeben, auf das die physikalische Welt bezogen werde, und liegt noch ein zweites Bezugssystem $x'y'z'u'$ zu gleicher Verwendung vor, so sind nach der Relativitätstheorie die beiden Systeme gleichberechtigt, d. h. sie sagen über die Erscheinungswelt das Gleiche aus, sobald sich die Koordinaten des einen Systems aus denen des anderen durch homogene lineare Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} x &= A_{11}x' + A_{12}y' + A_{13}z' + A_{14}u' \\ y &= A_{21}x' + A_{22}y' + A_{23}z' + A_{24}u' \\ z &= A_{31}x' + A_{32}y' + A_{33}z' + A_{34}u' \\ u &= A_{41}x' + A_{42}y' + A_{43}z' + A_{44}u' \end{aligned}$$

bestimmen, wobei die konstanten reellen Koeffizienten A_{ik} von der Determinante 1 sind und den 10 Bedingungen

$$A_{1i}^2 + A_{2i}^2 + A_{3i}^2 - A_{4i}^2 = \begin{cases} +1, & \text{für } i = 1, 2, 3 \\ -1, & \text{für } i = 4 \end{cases},$$

$$A_{1i}A_{1k} + A_{2i}A_{2k} + A_{3i}A_{3k} - A_{4i}A_{4k} = 0 \quad \text{für } i \neq k$$

genügen, wie sie aus der Forderung $x^2 + y^2 + z^2 - u^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2$ hervorgehen [1]).

Diese Formeln erhalten, wenn man die folgenden Matrizen

$$(1) \qquad \mathfrak{r} = \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{r}' = \begin{vmatrix} x' & y' & z' & u' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

einführt, die symbolische Gestalt:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'\bar{A},$$
$$AeA = e.$$

1) Das Nähere bei v. Brill [ζ].

Dabei sind alle in den genannten Matrizen auftretenden Größen reell. Die erste Gleichung läßt sich nach $\mathfrak{r}'$ auflösen, wenn man sie rechtsseitig unter Berücksichtigung von $e^2 = 1$ mit eAe multipliziert:

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot eAe,$$
$$\bar{A}eA = e.$$

Die Minkowskische Symbolik gelangt zu einfacheren Gleichungen, nämlich zu [1]):

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}a, \quad \bar{a}a = 1$$

und erreicht dies durch Einführung imaginärer Größen. Um diese imaginären Größen zu vermeiden, ändern wir die übliche Matrizenrechnung an geeigneter Stelle ab. Wir fordern:

Die neue Multiplikation „MN“ ist so zu definieren, daß

1. Die Lorentztransformation und die Bedingungen ihrer Koeffizienten a_{ik} in symbolischer Form genau so lauten wie bei Minkowski:
$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}a, \quad \bar{a}a = 1;$$
2. Daß es stets möglich ist, die Formeln der neuen Rechnung in solche der alten Rechnung umzuschreiben, die dasselbe aussagen.

Der zweiten Forderung genügt man am einfachsten, indem man das neue Produkt MN durch das alte Produkt MxN erklärt, wo x eine noch zu bestimmende Matrix ist. Als Einheitsmatrix E der neuen Rechnung dient diejenige, für welche nach der alten Schreibweise

$$ExM = M$$

ist. Um die erste Forderung zu erfüllen, schreiben wir die dort genannten Gleichungen in die alte Form um:

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}xa, \quad \bar{a}xa = E$$

und verlangen, daß sie mit den oben gefundenen Gleichungen

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}eAe, \quad \bar{A}eA = e$$

identisch sind. Dies geschieht für die Gleichungen mit $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$, die für alle $\mathfrak{r}$ zu gelten haben, nur, wenn man $xa = eAe$ setzt. Zur Bestimmung der *unbekannten Matrizen* x, a *und* E stehen demnach folgende Gleichungen zur Verfügung:

1. $ExM = M$,
2. $xa = eAe$,

1) Minkowski [α] verwendet für $\mathfrak{r}$ eine ungleichseitige Matrix; wir schließen solche Matrizen grundsätzlich aus.

$$3.\ \bar{a}xa = E,$$
$$4.\ \bar{A}eA = e.$$

Dabei haben die beiden letzten Relationen das Gleiche auszusagen. M ist eine beliebige Matrix. Die Auflösung führt, wie man leicht einsieht, zu dem Ergebnis:

$$E = \varrho e,$$
$$a = \varrho A e,$$
$$x = \frac{e}{\varrho}$$

als der *allgemeinsten* Lösung der vier Gleichungen 1. bis 4. Dabei ist ϱ eine Diagonalmatrix.

Die einfachste Lösung erhalten wir für $\varrho = 1$. Also: Den obigen Forderungen wird *am einfachsten* durch das Gleichungssystem

$$x = e,\ a = Ae,\ E = e$$

genügt.

Art. 3. Folgerungen für die Form der Lorentztransformation.

Nach der ersten Forderung sind in der neuen Rechnung die Gleichungen

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}a, \tag{2}$$

$$\bar{a}a = 1 \tag{3}$$

die symbolischen Ausdrücke für die *Lorentztransformation* und die Bedingungen ihrer *Koeffizienten* a_{ik}; diese haben an die Stelle der A_{ik} zu treten. Aus $a = Ae$ folgt $A_{i1} = a_{i1}, \cdots, A_{i4} = -a_{i4}$, und daher lauten die obigen (Art. 2) *Transformationsformeln*:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' - a_{14}u' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' - a_{24}u' \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' - a_{34}u' \\ u &= a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' - a_{44}u'. \end{aligned} \tag{4}$$

In dieser Form sind sie anzusetzen, um eine so einfache symbolische Schreibweise wie bei Minkowski zu ermöglichen. Die Determinante ihrer *Koeffizientenmatrix*

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{5}$$

hat den Wert

$$|a| = -1 \quad (6)$$

wie aus $|a| = |Ae| = |A| \cdot |e| = 1 \cdot -1$ hervorgeht.

Art. 4. Grundlagen der neuen Matrizenrechnung.

In der neuen Matrizenrechnung werde unter M, $\overline{M}$, $|M|$, $M+N$, $M=N$ dasselbe verstanden wie in der üblichen. Dagegen definieren wir gemäß der Lösung $x=e$ die *Multiplikation* von M und N, in Zeichen MN, durch das alte Produkt MeN. In nicht symbolischer Schreibweise lautet hiervon das ik-Element:

$$(MN)_{ik} = M_{i1}N_{1k} + M_{i2}N_{2k} + M_{i3}N_{3k} - M_{i4}N_{4k}$$

oder kürzer:

$$(MN)_{ik} = \overset{j}{\underline{\Sigma}} M_{ij}N_{jk}, \quad (7)$$

wo der Strich bei dem Summenzeichen ausdrücken soll, daß das 4. Glied der Summe negativ in Ansatz kommt. Es zeigt sich, daß im allgemeinen $MN \neq NM$ ist. Eine Matrix ϱ, die mit jeder beliebigen Matrix M vertauschbar ist, heiße *Diagonalmatrix*. Für sie gilt also $\varrho M = M\varrho$ oder im alten Sinn: $\varrho eM = Me\varrho$ oder $\varrho e(Me) = (Me)\varrho e$. Hiernach ist, weil Me beliebig und ϱe vertauschbar ist, ϱe eine Diagonalmatrix α im alten Sinn: $\varrho e = \alpha$ oder

$$\varrho = \alpha e = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{vmatrix}.$$

Die neue *Diagonalmatrix* [2]) hat demnach die Form:

$$\varrho = \begin{vmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Das Produkt ϱM enthält die Elemente ϱM_{ik}. Als *Einheitsmatrix* E dient gemäß der obigen Lösung die Matrix e [3]), die als spezielle Diagonalmatrix das Zeichen 1 erhält. Die *Poten-*

1) Die Rechtshändigkeit des dreidimensionalen Koordinatensystems (xyz) bleibt bestehen.

2) Diagonalmatrizen bezeichnen wir stets mit griechischen Buchstaben $(\alpha, \beta, \cdots \varrho, \cdots)$.

3) Bereits von Wilson [1] erwähnt. S. 498, Anm.

zen M^{-1}, M^0, M^1, M^2, $\cdots$ von M werden ebenso erklärt wie früher. Auch hier existiert M^{-1} nur, wenn $|M| \neq 0$ ist. Denn aus der Definitionsgleichung $M^{-1}M = 1$ folgt die alte Gleichung

$$\underset{\text{neu}}{M^{-1}eM} = e \text{ oder } \underset{\text{neu}}{M^{-1}} = e\underset{\text{alt}}{M^{-1}}e,$$

d. h. die neue *reziproke Matrix* M^{-1} existiert nur, wenn man die alte M^{-1} angeben kann; und dies geschieht, wenn $|M| \neq 0$ ist. Zugleich zeigt die letzte Gleichung, daß sich die reziproken Matrizen der neuen und der alten Rechnung nicht decken. Weiter sind alle Potenzen von M mit einander vertauschbar. Die vorstehend erklärte Multiplikation genügt dem assoziativen und dem distributiven Gesetz:

$$(MN)R = M(NR),$$
$$M(N+R) = MN+MR;$$

denn die Uebertragung in die alte Rechnung liefert die offenbar richtigen Gleichungen:

$$(MeN)eR = Me(NeR) \text{ und } Me(N+R) = MeN+MeR.$$

Die wiederholte Anwendung der Definitionsformel für $(MN)_{ik}$ führt, wie man leicht zeigt, zu der allgemeinen Formel:

$$(9) \qquad (MNR\cdots TU)_{ik} = \sum\nolimits^{j}(M_{ij_1}N_{j_1j_2}R_{j_2j_3}\cdots T_{j_{n-1}j_n}U_{j_nk}),$$

in der die Summation über j_1, j_2, $\cdots j_n$ (jeder Index geht von 1—4) in irgend einer (eventuell durch Klammern zum Teil vorgeschriebenen) Reihenfolge auszuführen ist; der Strich unter dem Summenzeichen zeigt an, daß bei jeder Teilsummation das 4. Glied negativ anzusetzen ist.

Die Bestimmung der *transponierten* und der *reziproken Matrix eines Produktes* MN kann auf die einzelnen Faktoren übertragen werden, wenn man ihre Reihenfolge umkehrt:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \bar{M}\bar{N} &= \overline{NM}, \\ (MN)^{-1} &= N^{-1}M^{-1}. \end{aligned}$$

Denn die erste Formel ist mit der alten $MeN = \bar{N}e\bar{M}$ gleichbedeutend und die zweite Formel wird zu einer Identität, wenn man sie rechtsseitig mit MN multipliziert. Die Determinante eines Produktes folgt aus denen der einzelnen Faktoren nach der Formel

$$(11) \qquad |MN| = -|M|\cdot|N|.$$

Denn MN hat den alten Sinn MeN, wovon die Determinante gleich $|M|\cdot|e|\cdot|N| = -|M|\cdot|N|$ ist. Aus dem Vorhergehenden

folgt: zwei Matrizen M und N sind vertauschbar, wenn ihr Produkt eine *nichtverschwindende* Diagonalmatrix ϱ ist:

$$MN = \varrho = NM. \tag{12}$$

Denn weil $|\varrho| \neq 0$, verschwinden auch die Determinanten von M und N nicht, weshalb M^{-1} und N^{-1} existieren. Aus $MN = \varrho$ entsteht also $N = \varrho M^{-1}$ oder $NM = \varrho M^{-1} M = \varrho$, wie behauptet.

Um den in der Determinantentheorie grundlegenden Laplaceschen Zerlegungssatz in symbolische Form zu bringen, führen wir außer der Matrix

$$\varkappa = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

die der Gleichung $\varkappa^2 = 1$ genügt und nicht vertauschbar ist, die *adjungierte Matrix* $\overset{\circ}{M}$ von M ein:

$$\overset{\circ}{M} = \begin{vmatrix} \overset{\circ}{M}_{11} & \overset{\circ}{M}_{12} & \overset{\circ}{M}_{13} & \overset{\circ}{M}_{14} \\ \overset{\circ}{M}_{21} & \overset{\circ}{M}_{22} & \overset{\circ}{M}_{23} & \overset{\circ}{M}_{24} \\ \overset{\circ}{M}_{31} & \overset{\circ}{M}_{32} & \overset{\circ}{M}_{33} & \overset{\circ}{M}_{34} \\ \overset{\circ}{M}_{41} & \overset{\circ}{M}_{42} & \overset{\circ}{M}_{43} & \overset{\circ}{M}_{44} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Ihr allgemeines Element $\overset{\circ}{M}_{ik}$ [1]) ist die Unterdeterminante des Elementes M_{ik} in der beliebigen Matrix M. Alsdann lautet in vier verschiedenen Formen der (spezialisierte) *Laplacesche Zerlegungssatz symbolisch*:

$$\left.\begin{matrix} \overset{\circ}{M}\varkappa\bar{M} \\ M\varkappa\overset{\circ}{M} \\ \bar{M}\varkappa\overset{\circ}{M} \\ \overset{\circ}{M}\varkappa M \end{matrix}\right\} = |M| \cdot \varkappa, \tag{15}$$

worin $|M|$ die aus der Determinante von M gebildete Diagonalmatrix [2]) ist. Denn die linke Seite der ersten Form gibt in die alte Rechnung übertragen: $\overset{\circ}{M}e\varkappa e\bar{M}$ oder, weil $\varkappa$ nunmehr Einheitsmatrix wird, $\overset{\circ}{M}ee\bar{M}$ oder $\overset{\circ}{M}\bar{M}$, während rechts die Matrix

---

1) Zur Vermeidung von Mißverständnissen schreiben wir nicht $[M_{ik}]$ oder μ_{ik}.

2) Dieser Fall tritt häufig auf. Das Zeichen ϱ (hier $|M|$) bedeutet eine gewöhnliche Zahl oder eine Diagonalmatrix, je nachdem es in einer „gewöhnlichen“ oder einer „symbolischen“ Gleichung vorkommt.

$$\begin{vmatrix} |M| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |M| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |M| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |M| \end{vmatrix}$$

erscheint. Also ist $(\check{M}M)_{ii} = |M|$ und $(\check{M}M)_{ik} = 0$ für $i \neq k$ oder ausführlich:

$$\sum_j \check{M}_{ij} M_{ij} = |M|,$$

$$\sum_j \check{M}_{ij} M_{kj} = 0, \quad i \neq k, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

und dies ist der Zerlegungssatz in gewöhnlicher Form. Seine zweite und vierte symbolische Form folgt durch Transponieren aus der ersten und dritten und seine dritte Form durch rechtsseitige Multiplikation der ersten mit $\varkappa$ und Anwendung des Satzes (12).

Die *adjungierte Matrix eines Produktes* findet man aus denen der einzelnen Faktoren nach der Formel:

$$\check{(}MN) = -\check{M}\check{N}. \tag{16}$$

Denn multipliziert man die 3. Form des Laplaceschen Satzes linksseitig mit $\varkappa$ und setzt für $M \cdots MN$, so folgt:

$$\varkappa \overline{MN} \varkappa \check{(}MN) = |MN|$$

oder nach (10) und (11) und, indem man linksseitig mit $\check{M}\check{N}$ multipliziert:

$$\check{M}(\check{N}\varkappa\overline{N})\ \overline{M}\varkappa\check{(}MN) = -|M| \cdot |N| \cdot \check{M}\check{N}.$$

Die erste Klammer ist nach (15) $|N|\varkappa$, so daß $|N|$ herausfällt; es bleibt

$$(\check{M}\varkappa\overline{M})\varkappa\check{(}MN) = -|M|\check{M}\check{N}.$$

Aus demselben Grunde wie eben fällt hier die erste Klammer gegen $|M$ weg: also ist $\varkappa\varkappa\check{(}MN) = -\check{M}\check{N}$, wie behauptet. Die stillschweigend gemachten Voraussetzungen $M| \neq 0$ und $|N| \neq 0$ können aus Stetigkeitsgründen aufgehoben werden.

Im folgenden bedienen wir uns ausschließlich der vorstehend erklärten neuen Matrizenrechnung.

II. Grundlagen der reellen Symbolik in Beziehung zur Relativitätstheorie.

a) Verwendung gewöhnlicher Matrizen.

Art. 5. Definition der Matrizen I. und II. Art.

Die Grundgleichung (2): $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}a$ gibt an, wie sich die Koordinaten $xyzu$ beim Uebergang von einem berechtigten System zu einem anderen transformieren. Um zu erfahren, wie sich die Quadrate und Produkte x^2, xy, xz, $\cdots$, zu, u^2 der Weltkoordinaten transformieren, bilden wir aus ihnen die Matrix

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & xz & xu \\ yx & y^2 & yz & yu \\ zx & zy & z^2 & zu \\ ux & uy & uz & u^2 \end{vmatrix},$$

die nach (1) offenbar gleich $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}$ ist. Da nach (2) und (10) $(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})' = \mathfrak{x}'\bar{\mathfrak{x}}' = \mathfrak{x}a\bar{a}\bar{\mathfrak{x}} = a\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}a$, so transformieren sich die Quadrate der Weltkoordinaten nach der Gleichung

$$(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})' = \bar{a}(\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}})a.$$

Wir definieren nun, indem wir diese Gleichung und die in (2) genannte auf beliebige Matrizen erweitern:

Eine beliebige *Matrix M heiße von I. Art*, in Zeichen M_I, wenn sie sich wie $\mathfrak{x}$ und *von II. Art*, in Zeichen M_{II}, wenn sie sich wie $\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}$ transformiert. Demnach gilt bei einer Matrix I. Art:

$$M' = Ma \tag{17}$$

und bei einer solchen II. Art:

$$M' = \bar{a}Ma. \tag{18}$$

Dabei ist unter M' diejenige Matrix zu verstehen, die aus M her-

vorgeht, wenn man den Argumenten $xyzu$ der Funktionen M_{ik} Accente *anfügt*, was durch M'_{ik} ausgedrückt werde. Alle Matrizen I. Art[1]) werden durch kleine, alle der II. Art durch große Buchstaben bezeichnet.

Art. 6. Einfache[2]) Matrizen I. Art.

Von den Matrizen I. Art sondern wir diejenigen ab, deren Elemente bis auf die der ersten Zeile sämtlich Null sind; wir nennen sie *Vektoren I. Art* oder *Viererrektoren* und bezeichnen sie durch deutsche Buchstaben ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots$). Um anzudeuten, daß der Vektor I. Art $\mathfrak{a}$ nach den Regeln der vierdimensionalen Vektoranalysis die vier Komponenten: $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{a}_2\ \mathfrak{a}_3\ \mathfrak{a}_4$ hat[3]), schreiben wir:

$$\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{19}$$

erklären also $\mathfrak{a}_i$ identisch mit $\mathfrak{a}_{1i}$. Dann ist jede Matrix I. Art von der Form:

$$M_I = \begin{matrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{a}_4 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{b}_4 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_2 & \mathfrak{d}_3 & \mathfrak{d}_4 \end{matrix}, \tag{20}$$

enthält also die Komponenten der vier Vektoren I. Art $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$[4]). Die Gleichung $M'_I = M_I a$ zerfällt nämlich in die vier Teilgleichungen $M'_{1i} = (Ma)_{1i}$, $M'_{2i} = (Ma)_{2i}, \cdots$, die, wie die Ausrechnung zeigt, mit $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}a$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}a, \cdots$ identisch sind und damit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots$ als Vektoren I. Art kennzeichnen. Spaltet man in M_I den Vektor $\mathfrak{a}$ als Summand ab, so bleibt nach 17) die Matrix I. Art:

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{b}_4 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_2 & \mathfrak{d}_3 & \mathfrak{d}_4 \end{matrix}$$

übrig, so daß sich jede Matrix I. Art in die Form $M_I = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$

1) Minkowski [a] hat keine allgemeinen Matrizen I. Art eingeführt.
2) Im Gegensatz zu „zusammengesetzt“.
3) Man schreibt auch $\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y, \ldots$
4) Z. B. vier Raumzeitpunkte x_i, y_i, z_i, u_i.

setzen läßt. Geht man in der Definitionsgleichung (17) beiderseits zur adjung. Matrix über und beachtet (16), so ist $\breve{M}' = -\breve{M}\breve{a}$ oder, indem man rechtsseitig mit der identischen Gleichung $\varkappa \equiv \varkappa \bar{a} a$ multipliziert, $\breve{M}'\varkappa = -\breve{M}(\breve{a}\varkappa\bar{a})a$.

Nach (15) und (6) folgt hieraus $(\breve{M}\varkappa)' = -\breve{M}|a|\varkappa a$ oder $(\breve{M}\varkappa)' = (\breve{M}\varkappa)a$,

(21) { d. h.: *Ist M eine beliebige Matrix I. Art, so ist auch* $\breve{M}\varkappa$ *von I. Art.*

Insbesondere erhält man für $M = (\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ den Vektor I. Art:

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}] = \breve{(}\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})\varkappa, \tag{22}$$

dessen Komponenten[1]) offenbar die vier Determinanten der unvollständigen Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{b}_4 \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 & \mathfrak{c}_4 \\ \mathfrak{d}_1 & \mathfrak{d}_2 & \mathfrak{d}_3 & \mathfrak{d}_4 \end{matrix} \right\|, \tag{23}$$

sind, wobei die letzte mit umgekehrtem Vorzeichen zu versehen ist. Diese wechseln bei Vertauschung z. B. der $\mathfrak{b}_i$ mit den $\mathfrak{c}_i$ ihre Vorzeichen; also ist

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}] = -[\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]. \tag{24}$$

Für $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ verschwindet dieser Vektor.

Art. 7. Einfache Matrizen II. Art.

Aus den *Matrizen II. Art* scheiden wir alle symmetrischen und alternierenden Matrizen aus; für sie gebrauchen wir deutsche Buchstaben ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots$). Die *symmetrischen*, für welche $M_{ik} = M_{ki}$, also $\bar{M} = M$, ist, nennen wir *Tensoren*, die *alternierenden*, für die $M_{ik} = -M_{ki}$ $(i \neq k)$, $M_{ii} = 0$, also $\bar{M} = -M$ ist, *Vektoren II. Art* oder *Sechservektoren*. Um anzudeuten, daß nach den Regeln der vierdimensionalen Vektoranalysis der Vektor II. Art $\mathfrak{A}$ die sechs Komponenten $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \mathfrak{A}_3\ \mathfrak{A}_4\ \mathfrak{A}_5\ \mathfrak{A}_6$ hat, schreiben wir

$$\mathfrak{A} = \left| \begin{matrix} 0 & \mathfrak{A}_3 & -\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_4 \\ -\mathfrak{A}_3 & 0 & \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_5 \\ \mathfrak{A}_2 & -\mathfrak{A}_1 & 0 & \mathfrak{A}_6 \\ \mathfrak{A}_4 & -\mathfrak{A}_5 & -\mathfrak{A}_6 & 0 \end{matrix} \right|, \tag{25}$$

1) Diese sind die Unterdeterminanten der a_i in (20) und entsprechen den Sommerfeldschen „Ergänzungen“ zu den a_i. ([7] I, S. 759). (Vektor III. Art).

(26) erklären also $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \mathfrak{A}_3,\ \mathfrak{A}_4\ \mathfrak{A}_5\ \mathfrak{A}_6$
identisch mit $\mathfrak{A}_{23}\ \mathfrak{A}_{31}\ \mathfrak{A}_{12},\ \mathfrak{A}_{14}\ \mathfrak{A}_{24}\ \mathfrak{A}_{34}$ [1]).

Für die 10 Komponenten der Tensoren gebrauchen wir keine besonderen Bezeichnungen.

Aus der Definitionsgleichung (18) folgt auf ähnlichem Wege wie oben der Satz:

(27) *Ist M eine beliebige Matrix II. Art, so ist auch $\varkappa^{\mathfrak{c}} M \varkappa$ von II. Art.*

Bildet man insbesondere die Matrix $\varkappa^{\mathfrak{c}}\mathfrak{A}\varkappa$, so tritt in allen ihren Elementen der Faktor

$$\varrho = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_5 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_6$$

auf, und es entsteht, indem man aus ϱ eine Diagonalmatrix bildet, die Gleichung

$$\varkappa^{\mathfrak{c}}\mathfrak{A}\varkappa = -\varrho\,\mathfrak{A}^*, \tag{28}$$

wobei $\mathfrak{A}^*$ die Matrix

$$\mathfrak{A}^* = \begin{vmatrix} 0 & -\mathfrak{A}_6 & \mathfrak{A}_5 & \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_6 & 0 & -\mathfrak{A}_4 & \mathfrak{A}_2 \\ -\mathfrak{A}_5 & \mathfrak{A}_4 & 0 & \mathfrak{A}_3 \\ -\mathfrak{A}_1 & -\mathfrak{A}_2 & -\mathfrak{A}_3 & 0 \end{vmatrix} \tag{29}$$

bedeutet. Die Vektoreigenschaft von $\varkappa^{\mathfrak{c}}\mathfrak{A}\varkappa$ drückt sich jetzt nach (18) durch $\varrho'\mathfrak{A}^{*\prime} = \varrho\,\bar{a}\mathfrak{A}^* a$ oder, da ϱ invariant [2]) ist, also $\varrho' = \varrho$ ist, durch $\mathfrak{A}^{*\prime} = \bar{a}\mathfrak{A}^* a$ aus, d. h. mit $\mathfrak{A}$ ist zugleich auch $\mathfrak{A}^*$ ein Vektor II. Art. Wir nennen ihn den *dualen Vektor* von $\mathfrak{A}$. Seine Komponenten [3])

(30) $\mathfrak{A}_1^*\ \ \mathfrak{A}_2^*\ \ \mathfrak{A}_3^*,\ \mathfrak{A}_4^*\ \mathfrak{A}_5^*\ \mathfrak{A}_6^*$
sind, wie aus (29) durch Vergleich mit (25) hervorgeht, identisch mit [4]):
$-\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{A}_5 - \mathfrak{A}_6,\ \mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2\ \mathfrak{A}_3,$

wodurch zugleich angezeigt ist, wie man die Komponenten von $\mathfrak{A}$ umordnen muß, um die von $\mathfrak{A}^*$ zu erhalten. Hiernach hat der duale Vektor von $\mathfrak{A}^*$, d. h. $\mathfrak{A}^{**}$, die Komponenten

$$-\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_3,\ -\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{A}_5 - \mathfrak{A}_6;$$

---

1) Man schreibt hierfür auch: $\mathfrak{A}_{yz}$, $\mathfrak{A}_{zx}$, $\mathfrak{A}_{xy}$; $\mathfrak{A}_{xu}$, $\mathfrak{A}_{yu}$, $\mathfrak{A}_{zu}$. Ein Vektor II. Art ist z. B. in der Elektronentheorie das elektromagnetische Feld $\mathfrak{A} = \mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ (d. h. $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{E}_x, \cdots, \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{H}_x \cdots$).

2) Als Quadratwurzel aus der Determinante von $\mathfrak{A}$ (s. Art. 10, Ende).

3) Sommerfeld ([γ] I 756) nennt sie die „Ergänzungen“ zu den $\mathfrak{A}_i$.

4) Also nicht wie bei Minkowski (α S. 29) mit $\mathfrak{A}_4, \cdots \mathfrak{A}_1, \cdots$.

(31) $$\text{also ist: } \mathfrak{A}^{**} = -\mathfrak{A}\ ^{1}).$$

Rechtsseitige Multiplikation von (28) mit $\overline{\mathfrak{A}} = -\mathfrak{A}$ führt wegen (15) und $\varkappa^2 = 1$ auf $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A} = \frac{1}{\varrho}\,|\mathfrak{A}$, weshalb $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ eine Diagonalmatrix ist. Ihr 11-Element ist, wie die direkte Ausrechnung nach (25) und (29) zeigt, gleich ϱ. Also gilt nach (12):

(32) $$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{A} = \Sigma \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4,$$

wo sich das *Summenzeichen* auf eine cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 und 4, 5, 6 bezieht.

Art. 8. Zusammengesetzte Matrizen I. und II. Art.

Summe und *Differenz* von Matrizen gleicher Art führen nach (17) und (18) stets zu Matrizen derselben Art. Für die *Produkte* dagegen gelten die Regeln:

(33) $$\begin{aligned} M_I\ N_{II} &= I, \\ \overline{M}_I\ N_I\ &= II, \\ M_{II}N_{II} &= II, \end{aligned}$$

worin I und II Matrizen I. bzw. II. Art bezeichnen. Denn nach (3), (17) und (18) ist z. B. $(M_I N_{II})' = M'N' = Ma \cdot \bar{a}Na = (MN)a$, d. h. $M_I N_{II}$ von I. Art, wie behauptet.

Demnach sind die Matrizen $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{A}^*$ Vektoren I. Art und $\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}$ [2]) wie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*$ Matrizen II. Art. Da sie in den Anwendungen häufig auftreten, geben wir ihre Komponenten bzw. Elemente ausführlich an. Man findet durch Ausrechnen der Produkte nach (19), (25) und (29)

(34) $$\begin{aligned} (\mathfrak{a}\mathfrak{A})_1 &= \mathfrak{a}_4\mathfrak{A}_4 - (\mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{a}_3\mathfrak{A}_2), \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{A})_2 &= \mathfrak{a}_4\mathfrak{A}_5 - (\mathfrak{a}_3\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{A}_3), \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{A})_3 &= \mathfrak{a}_4\mathfrak{A}_6 - (\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_1), \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{A})_4 &= \mathfrak{a}_1\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_5 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{A}_6; \end{aligned}$$

(35) $$\begin{aligned} (\mathfrak{a}\mathfrak{A}^*)_1 &= \mathfrak{a}_4\mathfrak{A}_1 + (\mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_6 - \mathfrak{a}_3\mathfrak{A}_5), \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{A}^*)_2 &= \mathfrak{a}_4\mathfrak{A}_2 + (\mathfrak{a}_3\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{A}_6), \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{A}^*)_3 &= \mathfrak{a}_4\mathfrak{A}_3 + (\mathfrak{a}_1\mathfrak{A}_5 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_4), \\ (\mathfrak{a}\mathfrak{A}^*)_4 &= \mathfrak{a}_1\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{A}_3. \end{aligned}$$

(36) $$\text{und} \quad (\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b})_{ik} = \mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_k.$$

---

1) In der Minkowskischen Symbolik würde diese Gleichung $\mathfrak{A}^{**} = \mathfrak{A}$ lauten.

2) Minkowski hat diese Matrix nicht eingeführt.

Die übrigen vier Produkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \cdots$ lassen sich sämtlich durch eine einzige Matrix M gemäß den Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{B} &= M - \varrho \\ \mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^* &= M + \varrho \\ \mathfrak{B}\mathfrak{A} &= \overline{M} - \varrho \\ \mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^* &= \overline{M} + \varrho \end{aligned} \tag{37}$$

ausdrücken, wobei ϱ die aus dem Werte

$$\varrho = \frac{1}{2} \Sigma (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_4) \tag{38}$$

gebildete Diagonalmatrix ist, während M die Elemente hat:

$$\begin{aligned} M_{23} &= \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_5 \mathfrak{B}_6, \\ M_{32} &= \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{A}_6 \mathfrak{B}_5, \\ M_{14} &= \mathfrak{A}_3 \mathfrak{B}_5 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_6, \\ M_{41} &= \mathfrak{A}_5 \mathfrak{B}_3 - \mathfrak{A}_6 \mathfrak{B}_2, \end{aligned} \tag{39}$$

$$M_{11} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_4 - \frac{1}{2} \Sigma (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_4),$$

$$M_{44} = -\frac{1}{2} \Sigma (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_4), \text{ etc.}$$

Vertauscht man linker Hand die Indizes 1, 2, 3 cyklisch und rechts außerdem noch 4, 5, 6, so folgen die übrigen Elemente von M.

Die Richtigkeit der letzten Angaben ergibt sich durch Betrachtung des Ausdrucks

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^*)(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^*)^* + \mathfrak{B}^*\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*,$$

der einerseits wegen (31) gleich $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^*)(\mathfrak{A}^* - \mathfrak{B}) + \mathfrak{B}^*\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$ oder ausgerechnet gleich $\mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^* - \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und andererseits wegen (32), (30) und (38) gleich $\Sigma(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1^*)(\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_4^*) + \Sigma \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_4 - \Sigma \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_4 = \Sigma(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_4) = 2\varrho$ wird. Also ist:

$$\mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^* - \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \Sigma(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_4 \mathfrak{B}_4) = 2\varrho. \tag{40}$$

Gibt man dieser Gleichung die Form $\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varrho = \mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^* - \varrho$ und setzt $\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \varrho = M$, woraus durch direkte Ausrechnung die angegebenen Elemente von M hervorgehen, so sind damit die beiden ersten Gleichungen von (37) gewonnen, aus denen die beiden letzten durch Transponieren hervorgehen. Damit ist (37) — (39) bewiesen.

Art. 9. Zusammengesetzte Vektoren II. Art ($\mathfrak{A}$) und Tensoren ($\mathfrak{T}$).

Aus der Matrix II. Art M_{II} entsteht ein Vektor II. Art ($\mathfrak{A}$) *und ein Tensor* ($\mathfrak{T}$), *wenn man setzt*:

$$\mathfrak{A} = M_{II} - \overline{M}_{II}, \quad \mathfrak{T} = M_{II} + \overline{M}_{II},$$

weil hieraus durch *Transponieren*[1]) die Gleichungen $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$ hervorgehen. Daher sind nach (36) und (37) $\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} - \bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ Vektoren II. Art und $\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*$ wie $\mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ Tensoren. Für den ersten häufig auftretenden Vektor[2]) gebrauchen wir die Abkürzung

(41) $$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} - \bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$$

und für seinen dualen Vektor schreiben wir

(42) $$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^* = (\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} - \bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})^*.$$

Die zugehörigen Komponenten sind nach (26), (36) und (30):

(43) $$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1;$$
$$a_1b_4 - a_4b_1,\ a_2b_4 - a_4b_2,\ a_3b_4 - a_4b_3 \quad \text{und}$$

(44) $$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]^* = a_4b_1 - a_1b_4,\ a_4b_2 - a_2b_4,\ a_4b_3 - a_3b_4;$$
$$a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1.$$

Mit Hilfe von (42) läßt sich der Vektor I. Art $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$ auf die Form bringen:

(45) $$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}] = \mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]^*.$$

Denn die erste Komponente rechts ist nach (35) für $\mathfrak{A} = [\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$ gleich $b_4[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]_1 + b_2[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]_6 - b_3[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]_5$ oder nach (43) gleich $b_4(c_2d_3 - c_3d_2) + b_2(c_3d_4 - c_4d_3) - b_3(c_2d_4 - c_4d_2)$, ein Ausdruck, der in der Tat nach (23) mit der ersten Komponente von $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$ übereinstimmt, wie behauptet. Aus (45) folgt wegen (24) die Relation:

(46) $$\mathfrak{b}[\mathfrak{c}\mathfrak{d}]^* = \mathfrak{c}[\mathfrak{d}\mathfrak{b}]^* = \mathfrak{d}[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^*,$$

die ein leichtes Rechnen mit den dualen Vektoren ermöglicht.

Art. 10. Lorentz-Invarianten von Vektoren und Tensoren.

Eine Matrix M heiße invariant, in Zeichen $M = inv$, wenn bei Anwendung einer beliebigen Lorentztransformation mit den Koeffizienten a_{ik} die Gleichung

(47) $$M' = M$$

besteht[3]). So ist z. B. die Matrix $M_l\bar{N}_l$ invariant, da nach (17), (10) und (3) $(M\bar{N})' = M'\bar{N}' = Ma \cdot \overline{Na} = Ma\bar{a}\bar{N} = M\bar{N}$ ist, wie behauptet[4]).

1) D. h. durch gliedweises Bilden der transponierten Matrix.

2) Minkowski (α S. 31) hat diesen Vektor nicht durch den wichtigen Matrizenausdruck $\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} - \bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}$ erklärt, sondern nur durch seine Komponenten.

3) Wir betonen ausdrücklich, daß nach obiger Festsetzung (S. 13) M'_{ik} von $x'\ y'\ z'\ u'$ genau so abhängt, wie M_{ik} von $x\ y\ z\ u$.

4) Die aus Weltradius $\mathfrak{r}$ (1) und Vierergeschwindigkeit $\mathfrak{q}$ (74) gebildete Invariante $\mathfrak{r}\left(1 + \frac{\mathfrak{q}\mathfrak{q}}{c^2}\right)\bar{\mathfrak{r}}$ reduziert sich im Fall der Ruhe auf das Element $x^2 + y^2 + z^2$.

Eine *allgemeinere Invariante* ist die (algebraische) Summe

$$\sum^{ik} M_{ik} N_{ik}$$

aus den Produkten entsprechender Elemente zweier beliebiger Matrizen M und N von *gleicher* Art, in Zeichen:

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{11}N_{11} + M_{12}N_{12} + M_{13}N_{13} - M_{14}N_{14} \\ + M_{21}N_{21} + M_{22}N_{22} + M_{23}N_{23} - M_{24}N_{24} \\ + M_{31}N_{31} + M_{32}N_{32} + M_{33}N_{33} - M_{34}N_{34} \\ - M_{41}N_{41} - M_{42}N_{42} - M_{43}N_{43} + M_{44}N_{44} \end{array} \right\} = inv.$$

Denn setzt man $\overline{M}N = R$, erklärt also nach (33) R als Matrix II. Art, so wird die vorstehende Summe gleich $\sum^{ik} \overline{M}_{ki} N_{ik} = \sum^{k} (\overline{M}N)_{kk}$ $= \sum^{k} R_{kk}$ und daher folgt nach (18) und (9): $\sum^{k} R'_{kk} = \sum^{k} (\bar{a} R a)_{kk} =$ $\sum^{kjh} \bar{a}_{kj} R_{jh} a_{hk} = \sum^{kjh} R_{jh} a_{hk} \bar{a}_{kj}$ oder nach (9) und (3) $= \sum^{j} (Ra\bar{a})_{jj} =$ $\sum^{j} R_{jj}$; also ist $\sum^{k} R'_{kk} = \sum^{j} R_{jj}$, wie behauptet. Die Summe (48) enthält *sämtliche* bei Vektoren und Tensoren möglichen Invarianten. So ist die aus den beiden *Vektoren I. Art* $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildete Matrix

$$(49) \quad \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}} = \left| \begin{array}{cccc} \sum^{i} \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

invariant, wie für $M = \mathfrak{a}$ und $N = \mathfrak{b}$ aus (48) hervorgeht. Wegen ihrer Symmetrie ist

$$(50) \quad \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}\bar{\mathfrak{a}}$$

und außerdem, wie die Ausrechnung zeigt,

$$(51) \quad \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}})_{11}\,\mathfrak{c}.$$

Dabei ist $\mathfrak{c}$ eine Matrix von der Form (19) und $(\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}})_{11}$ die aus

$$(52) \quad (\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}})_{11} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4$$

gebildete Diagonalmatrix.

Ferner: zwei *Vektoren II. Art* $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ haben nach (48) (für $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$, $N = \mathfrak{B}$ und $M = \mathfrak{A}$, $N = \mathfrak{B}^*$) mit Rücksicht auf (25) und (29) die Invarianten

$$(53) \quad \Sigma(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4) \text{ und } \Sigma(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4 + \mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1),$$

aus denen für $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ noch zwei weitere folgen. Für *Tensoren*

endlich erhält man durch die Annahmen $M = \mathfrak{T}$, $N = 1$ [1]) und $M = N = \mathfrak{T}$ die beiden Invarianten [2]):

$$(54)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}_{11} + \mathfrak{T}_{22} + \mathfrak{T}_{33} - \mathfrak{T}_{44} \\ \text{und} \\ \mathfrak{T}_{11}^2 + \mathfrak{T}_{12}^2 + \mathfrak{T}_{13}^2 - \mathfrak{T}_{14}^2 \\ + \mathfrak{T}_{21}^2 + \mathfrak{T}_{22}^2 + \mathfrak{T}_{23}^2 - \mathfrak{T}_{24}^2 \\ + \mathfrak{T}_{31}^2 + \mathfrak{T}_{32}^2 + \mathfrak{T}_{33}^2 - \mathfrak{T}_{34}^2 \\ - \mathfrak{T}_{41}^2 - \mathfrak{T}_{42}^2 - \mathfrak{T}_{43}^2 + \mathfrak{T}_{44}^2 \end{cases}$$

worin noch $\mathfrak{T}_{41} = \mathfrak{T}_{14}, \cdots$ zu setzen ist.

Invarianten *allgemeiner Matrizen I. oder II. Art* sind deren Determinanten [3]), wie aus (48) oder einfacher aus (17) und (18) nach (11) hervorgeht.

Art. 11. Auflösung einiger symbolischer Gleichungen.

Um die *Bedingungsgleichung* $\bar{a}a = 1$ (3) *für die Koeffizienten* a_{ik} einer Lorentztransformation nach a *aufzulösen*, machen wir die spezielle Annahme, a ließe sich durch die Matrix

$$p = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

mit den beliebigen Elementen p_i darstellen. Wir machen für a den Ansatz $a = \varrho \bar{p} p + 1$ und versuchen die Diagonalmatrix ϱ so zu bestimmen, daß die vorgelegte Gleichung $\bar{a}a = 1$ hierdurch erfüllt wird. Dazu muß $(\varrho \bar{p} p + 1)(\varrho \bar{p} p + 1) = 1$ oder $\varrho^2 \bar{p} p \bar{p} p + 2\varrho \bar{p} p = 0$ sein. Teilt man mit ϱ und wendet auf das erste Glied den Satz (51) an, so folgt:

$$\varrho \bar{p} (p \bar{p})_{11} p + 2 \bar{p} p = 0$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$(55)\quad \alpha = p_4^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

setzt, nach (52) $-\varrho \bar{p} \alpha p + 2 \bar{p} p = 0$ und daraus $(\alpha\varrho)\, \bar{p} p = 2 \bar{p} p$. Diese Gleichung läßt sich offenbar durch $\varrho = \frac{2}{\alpha}$ erfüllen. *Demnach ist*

1) Eine vertauschbare Invariante (hier 1) kann nach (18) stets als Matrix II. Art aufgefaßt werden.

2) Die erste heißt Lauesche Invariante; die zweite ist neu.

3) Die von M_I (20) kann als „vierdimensionales Volumen“ gedeutet werden.

die Matrix

$$\alpha = \frac{2}{\alpha}\, \bar{p} p + 1$$

oder ausführlicher nach (36)

$$(56) \quad a = \begin{vmatrix} \frac{2}{\alpha} p_1^2 + 1 & \frac{2}{\alpha} p_1 p_2 & \frac{2}{\alpha} p_1 p_3 & \frac{2}{\alpha} p_1 p_4 \\ \frac{2}{\alpha} p_2 p_1 & \frac{2}{\alpha} p_2^2 + 1 & \frac{2}{\alpha} p_2 p_3 & \frac{2}{\alpha} p_2 p_4 \\ \frac{2}{\alpha} p_3 p_1 & \frac{2}{\alpha} p_3 p_2 & \frac{2}{\alpha} p_3^2 + 1 & \frac{2}{\alpha} p_3 p_4 \\ \frac{2}{\alpha} p_4 p_1 & \frac{2}{\alpha} p_4 p_2 & \frac{2}{\alpha} p_4 p_3 & \frac{2}{\alpha} p_4^2 - 1 \end{vmatrix}$$

eine Lösung von $\alpha a = 1$. Soll sie zudem der Bedingung (6) genügen, so nehme man die Elemente der letzten Kolonne in a mit umgekehrtem Zeichen. Sie ist symmetrisch und reduziert sich für $p_4 = 0$ auf die Koeffizienten einer räumlichen Transformation; sieht man von diesem Fall ab, nimmt also $p_4 \neq 0$ an, so kann man allgemein setzen $p_1 = p_4 u$, $p_2 = p_4 v$, $p_3 = p_4 w$, $k = \frac{2}{\alpha} p_4^2$, wo u, v, w beliebige Zahlen sind. Dann entsteht aus (56) die *Lösung*

$$a = \begin{vmatrix} ku^2 + 1 & kuv & kuw & ku \\ kvu & kv^2 + 1 & kvw & kv \\ kwu & kwv & kw^2 + 1 & kw \\ ku & kv & kw & k - 1 \end{vmatrix},$$

in der $k = \frac{2}{1 - (u^2 + v^2 + w^2)}$ ist. Ersetzt man k, u, v, w entsprechend durch $k+1$, $\frac{ku}{k+1}$, $\frac{kv}{k+1}$, $\frac{kw}{k+1}$, so erhält man die von Herglotz und Brill[1]) angegebene Darstellung. — Würde man statt der obigen Annahme die Voraussetzung machen, a ließe sich als Funktion der *alternierenden* Matrizen p und p^* darstellen, so gelangte man zu der *Auflösung:*

$$a = \frac{(p + \alpha)^2 + (p^* + \beta)^2}{\sqrt{4(\sigma - \alpha\beta)^2 + (\tau + \alpha^2 - \beta^2)^2}},$$

wo $\sigma - \Sigma p_1 p_4$, $\tau = \Sigma(p_1^2 - p_4^2)$ und α und β beliebige Diagonalmatrizen sind. *Sie ist* trotz der darin enthaltenen sechs willkürlichen Parameter $p_1 \cdots p_6$ *nicht die allgemeinste reelle Darstellung* der a_{ik}, da sie z. B. nicht die Lösung (56) enthält[2]).

1) v. Brill (ζ S. 77), Herglotz [δ] S. 497.

2) Die symmetrischen Darstellungen der a_{ik} ergeben sich sämtlich für $\alpha = \beta = 0$. Sie genügen der Relation $\Sigma\, a_{ii} = 0$; im Gegensatz dazu steht (56).

Als ein weiteres Beispiel für die Behandlung symbolischer Gleichungen werde das *Gleichungspaar*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{A} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{d}$$

vorgelegt, welches bei gegebenen Matrizen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ der Form (19) nach der alternierenden Matrix $\mathfrak{A}$ aufgelöst werden soll. Multipliziert man rechtsseitig mit $\bar{\mathfrak{a}}$, bzw. $\mathfrak{b}$, so wird $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}\mathfrak{A}^*\bar{\mathfrak{b}}$. Da aber hier die rechtsstehenden Matrizen verschwinden, in Zeichen:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{a}} = 0, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{A}^*\bar{\mathfrak{b}} = 0, \tag{57}$$

weil die Matrizen die Form (49) haben und zugleich alternierend[1]) sind, so müssen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ den Bedingungen $\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{a}} = 0$, $\mathfrak{d}\bar{\mathfrak{b}} = 0$ genügen. Bildet man nun aus den gegebenen Gleichungen nach (34), (35) $\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_4$ und daraus die Größe

$$(\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3 - \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2) - (\mathfrak{a}_4\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_4),$$

so findet man:

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_4)\,\mathfrak{A}_1.$$

Also ist mit Rücksicht auf (52), (43), (44):

$$(\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}})_{11}\,\mathfrak{A}_1 = [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]_1 - [\mathfrak{a}, \mathfrak{d}]_1^*.$$

Analoge Gleichungen gelten für $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \cdots$ *Daher ist unter den Bedingungen*

(58)
$$\mathfrak{c}\bar{\mathfrak{a}} = 0, \quad \mathfrak{d}\bar{\mathfrak{b}} = 0$$

der Ausdruck[2])

$$(\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}})_{11}\,\mathfrak{A} = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}] - [\mathfrak{a}\mathfrak{d}]^*$$

die gesuchte Auflösung der Gleichungen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{A} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{d}.$$

Setzt man noch $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ in die Auflösung ein, so entsteht die *Identität*:

$$(\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}})_{11}\,\mathfrak{A} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}\mathfrak{A}] - [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\mathfrak{A}^*]^*,$$

von der die Minkowskische[3]) nur ein Spezialfall ist.

---

1) Man erkennt dies durch Transponieren.

2) Einsetzen der Lösung in die Hauptgleichungen zeigt, daß diese Bedingungen ausreichen.

3) Minkowski [α] S. 32.

b) Operationsmatrizen.

Art. 12. Differentialmatrizen [1]).

Um die Elemente M_{ik} der beliebigen Matrix M *partiell nach ihren Argumenten* $x\,y\,z\,u$ oder gemäß einer beliebigen *Parameter*-darstellung:

$$\begin{aligned} x &= x\,(\sigma), \\ y &= y\,(\sigma), \\ z &= z\,(\sigma), \\ u &= u\,(\sigma) \end{aligned} \tag{59}$$

total nach dem Parameter σ oder auf Grund beliebiger Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x &= x\,(\xi\,\eta\,\zeta\,\tau) \\ y &= y\,(\xi\,\eta\,\zeta\,\tau) \\ z &= z\,(\xi\,\eta\,\zeta\,\tau) \\ u &= u\,(\xi\,\eta\,\zeta\,\tau) \end{aligned} \tag{60}$$

partiell nach den neuen Variablen $\xi\,\eta\,\zeta\,\tau$ ableiten zu können, bedienen wir uns der drei untereinander nicht vertauschbaren *Operationsmatrizen*:

$$(61)\quad \frac{d}{d\sigma} = \begin{vmatrix} \frac{d}{d\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{d\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{d\sigma} \end{vmatrix},\quad \partial = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial u} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{2}),\quad \delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} & -\frac{\partial}{\partial \tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

deren Elemente Differentiationssymbole sind und durch doppelte oder, wo angängig, durch einfache Indizes unterschieden werden (z. B. ∂_i für ∂_{1i}, also $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \cdots \partial_4 = -\frac{\partial}{\partial u}$ etc.). *Wir erklären die Schreibweisen* $\frac{\partial}{\partial x} \cdot M_{ik}$ oder $\left(M_{ik}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ *als identisch mit dem Differentialquotienten* $\frac{\partial M_{ik}}{\partial x}$ und zeigen in Matrizenprodukten, wie $(M\partial)N$ und $M(\partial N)$, durch Klammern eindeutig an, auf welche Matrizen

1) Außer durch den Minkowskischen Operator „lor“ sind solche Matrizen in der Relativitätstheorie noch nicht eingeführt worden.

2) Entspricht der Minkowskischen einzeiligen Matrix „lor“, von der übrigens Minkowski fast nirgends Gebrauch macht.

sich ∂, δ, $\cdots$ zu beziehen haben. Alsdann läßt sich mit den Differenzialmatrizen $\frac{d}{d\sigma}$, ∂, δ wie mit gewöhnlichen Matrizen rechnen, vorausgesetzt, daß sich ihre Wirkung dabei immer auf dieselben Matrizen und dieselben Matrizenelemente[1]) erstreckt. Für das Matrizenprodukt $\frac{d}{d\sigma} M$ schreiben wir kürzer $\dot{M}$ und nennen es die *Ableitung von M nach σ*; höhere Ableitungen erklären wir durch fortgesetzte linksseitige Multiplikation mit $\frac{d}{d\sigma}$, setzen also $\ddot{M}$ für $\frac{d}{d\sigma}\dot{M}$, etc. Hiernach ist z. B.:

$$\dot{\mathfrak{r}} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\sigma} & \frac{dy}{d\sigma} & \frac{dz}{d\sigma} & \frac{du}{d\sigma} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Es enthalten nun die Matrizenprodukte ∂M, $\bar{\partial} M$, $(M\partial)$, $(M\bar{\partial})$ die partiellen Ableitungen der M_{ik} nach ihren Argumenten $xyzu$, $\dot{M}$ die nach σ und δM, $\bar{\delta} M$, $(M\delta)$, $(M\bar{\delta})$ die nach $\xi\eta\zeta\tau$. Wegen der Formeln (59) und (60) müssen sie in einem bestimmten Zusammenhang stehen. Dieser Zusammenhang drückt sich durch die Matrizengleichungen:

$$\dot{\mathfrak{a}} = \dot{\mathfrak{r}}\,(\bar{\partial}\,\mathfrak{a}) \tag{62}$$

und

$$\begin{aligned} \delta M &= \partial\,(k\,M), \\ \bar{\delta} M &= k\,(\bar{\partial} M) \end{aligned} \tag{63}$$

aus. Dabei ist $\mathfrak{a}$ eine Matrix von der Form (19) und k bedeutet die in Bezug auf $xyzu$ als konstant[2]) anzusehende Matrix

$$k = (\bar{\mathfrak{r}}\,\delta). \tag{64}$$

Durch Transponieren von (63) folgen noch Formeln für $(M\delta)$ und $(M\bar{\delta})$. Die Hilfsmatrix lautet ausführlich (36):

$$k = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\zeta} & -\frac{\partial x}{\partial\tau} \\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\zeta} & -\frac{\partial y}{\partial\tau} \\ \frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta} & \frac{\partial z}{\partial\zeta} & -\frac{\partial z}{\partial\tau} \\ \frac{\partial u}{\partial\xi} & \frac{\partial u}{\partial\eta} & \frac{\partial u}{\partial\zeta} & -\frac{\partial u}{\partial\tau} \end{vmatrix} \tag{65}$$

1) Diese Bedingung ist notwendig, da z. B. $M\,(\partial M) \neq (M\partial)\,M$ ist.

2) Dies gilt nur für die Ausdrücke in (63).

und enthält also nur die aus den Transformationsformeln (60) entnommenen partiellen Ableitungen. Ihre Determinante $|k|$ ist bis auf's Vorzeichen mit der Jakobischen Funktionaldeterminante der Transformation identisch. Deswegen heiße k die *Funktionalmatrix* von (60). Soll die zweite Gleichung von (63) nach ∂M auflösbar sein, so darf $|k|$, d. h. die Funktionaldeterminante von (60) nicht verschwinden. Unter dieser Bedingung existiert eindeutig ∂M und die Transformationsformeln sind nach $\xi\,\eta\,\zeta\,\tau$ auflösbar. Dies ist aber ein bekannter Satz.

Um nun (63) zu beweisen, bilden wir in der ersten Gleichung nach (7) und (9) das ik-Element:

$$\sum_{j} \delta_{ij} M_{jk} = \sum_{jh} \partial_{ih} (k_{hj} M_{jk})$$

und weisen die Richtigkeit von

$$\delta_{ij} M_{jk} = \sum_{h} (\partial_{ih} M_{jk})\, k_{hj}$$

nach, woraus durch Summation über j die vorige Gleichung folgt. Da das Element M_{jk} als einziges in der letzten Gleichung vorkommt, kann es durch eine beliebige Funktion f von $x\,y\,z\,u$ ersetzt werden, und da die Gleichung für $i = 2,\ 3,\ 4$ (wegen des Verschwindens von ∂ und δ) identisch erfüllt ist, braucht ihre Richtigkeit nur für $i = 1$ gezeigt zu werden. Dies gibt

$$\delta_j f = \sum_{h} (\partial_h f)\, k_{hj}$$

oder nach (64) und (36)

$$\delta_j f = \sum_{h} (\partial_h f)\, (\delta_j \mathfrak{x}_h), \text{ d. h.}$$

$$\delta_j f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta_j x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta_j y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\delta_j z + \frac{\partial f}{\partial u}\,\delta_j u.$$

Diese Formel ist aber nach (60) für alle f und j richtig. Also gilt die erste Gleichung von (63). Analog beweist man die zweite Gleichung und die Formel (62).

Art. 13. Die allgemeine Weltlinie, ihre Geometrie und dreidimensionale Interpretation.

In der $x\,y\,z\,u$-Mannigfaltigkeit, der „Welt", stellen die Gleichungen (59) eine beliebige Kurve, die „Weltlinie", dar. Die beiden Nachbarpunkte $x\,y\,z\,u$ und $x + dx,\ y + dy,\ z + dz,\ u + du$ von ihr bestimmen nach (1) zwei Vektoren I. Art, weshalb auch die Größen $dx,\ dy,\ dz,\ du$ die Komponenten eines solchen Vektors sind. Es

ist dies analog zum dreidimensionalen Raum das *vierdimensionale Bogenelement* $d\sigma$, dessen *Größe* wir durch den nach (49) invarianten Ausdruck:

$$d\sigma^2 = du^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{66}$$

erklären. Das endliche Bogenstück σ der Weltlinie zwischen den Punkten $x_0\, y_0\, z_0\, u_0$ und $x\, y\, z\, u$ ist dann durch das invariante Integral

$$\sigma = \int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}} \sqrt{du^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)} \tag{67}$$

bestimmt und diene nunmehr als *Parameter* für die analytische Darstellung (59) der betrachteten Weltlinie. Wegen seiner Invarianz sind sämtliche Ableitungen einer Matrix I. Art M nach σ, also $\dot{M}$, $\ddot{M}$, $\cdots$ von I. Art[1]). Denn nach (61) und (17) ist $\dot{M}' = \frac{d}{d\sigma} M' = \frac{d}{d\sigma}(Ma)$ oder, weil a nicht von der Differentiation betroffen wird, gleich $(\frac{d}{d\sigma} M)a = \dot{M}\, a$, d. h. in der Tat, $\dot{M}$ ist von I. Art. Analog folgt die gleiche Behauptung für $\ddot{M}$, $\cdots$.

Demnach sind mit Rücksicht auf (41) und (49) *die Matrizen*

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\mathfrak{r}},\ \ddot{\mathfrak{r}} \ \textit{Vektoren I. Art,} \\ \dot{\mathfrak{r}}\,\bar{\dot{\mathfrak{r}}},\ \dot{\mathfrak{r}}\,\bar{\ddot{\mathfrak{r}}},\ \ddot{\mathfrak{r}}\,\bar{\ddot{\mathfrak{r}}} \ \textit{Invarianten und} \\ [\dot{\mathfrak{r}}\,\ddot{\mathfrak{r}}],\ [\dot{\mathfrak{r}}\,\ddot{\mathfrak{r}}]^* \ \textit{Vektoren II. Art.} \end{array}\right. \tag{68}$$

Ihre *vierdimensionale* Bedeutung ergibt sich durch Analogieschluß aus den entsprechenden dreidimensionalen Bildungen[2]). Und zwar kann man die Vektoren

$$\dot{\mathfrak{r}},\ \ddot{\mathfrak{r}},\ [\dot{\mathfrak{r}}\,\ddot{\mathfrak{r}}],$$

weil ihre Komponenten entsprechend

$$\frac{dx}{d\sigma}, \cdots; \frac{d^2x}{d\sigma^2}, \cdots; \frac{dy}{d\sigma}\,\frac{d^2z}{d\sigma^2} - \frac{dz}{d\sigma}\,\frac{d^2y}{d\sigma^2}, \cdots$$

sind, als für die Orientierung der „Tangente", der „Hauptnormale", (Richtung des „Krümmungshalbmessers") und der durch beide Linien gehenden „Schmiegungsebene" der Weltlinie bestimmend ansehen und die Invariante $(\dot{\mathfrak{r}}\,\bar{\ddot{\mathfrak{r}}})_{11}$ wegen ihrer aus (52) hervorgehenden Form

$$f = \frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2u}{d\sigma^2}\right)^2 \tag{69}$$

1) Der gleiche Satz gilt auch von Matrizen II. Art.

2) vergl. Kommerells allg. Theorie der Raumkurven und Flächen. (Sammlung Schubert, XXIX, § 4).

als ein Maß der „Krümmung f“ und damit des „Krümmungsradius R“ [1]) der Weltlinie erklären. Die beiden übrigen Invarianten $\dot{\mathfrak{r}}\,\bar{\dot{\mathfrak{r}}}$ und $\dot{\mathfrak{r}}\,\bar{\ddot{\mathfrak{r}}}$ nehmen nach (52) und wegen der aus (66) (durch Division mit $d\sigma^2$ und nachfolgender Differentiation nach σ) entstehenden Gleichungen

$$\ddot{u}^2 - \dot{x}^2 - \ddot{y}^2 - \ddot{z}^2 = 1,$$
$$\dot{u}\,\ddot{u} - \dot{x}\,\ddot{x} - \dot{y}\,\ddot{y} - \dot{z}\,\ddot{z} = 0$$

die Werte

$$(\dot{\mathfrak{r}}\,\bar{\dot{\mathfrak{r}}})_{11} = -1,\ \dot{\mathfrak{r}}\,\bar{\ddot{\mathfrak{r}}} = 0 \tag{70}$$

an.

Um die *dreidimensionale* Bedeutung der genannten Vektoren und Invarianten zu ermitteln, setzen wir zur Abkürzung

$$\left\{\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{c}\,\sigma, \\ \mathfrak{q} &= c\,\dot{\mathfrak{r}}, \\ \mathfrak{p} &= c^2\,\ddot{\mathfrak{r}}, \\ \mathfrak{P} &= c^2\,[\dot{\mathfrak{r}}\,\ddot{\mathfrak{r}}] = \frac{1}{c}\,[\mathfrak{q}\mathfrak{p}], \end{aligned}\right. \tag{71}$$

wodurch (70) in

$$(\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}})_{11} = -c^2,\ \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{p}} = 0\ ^2) \tag{72}$$

übergeht, und berechnen die rechtsstehenden Matrizen. Die Gleichungen (59) stellen im dreidimensionalen Raum die Bewegung eines Punktes dar, der sich zur Zeit t am Ort $x\,y\,z$ befindet. Sei

$\mathfrak{v} = (\mathfrak{v}_x\,\mathfrak{v}_y\,\mathfrak{v}_z)$ seine Geschwindigkeit
$\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_x\,\mathfrak{p}_y\,\mathfrak{p}_z)$ seine Beschleunigung

zur Zeit t, so geben die Ausdrücke in (71) nach einigen Umformungen der Reihe nach: für die *Invariante* τ die „Eigenzeit“ (Minkowski β)

$$\tau = \int_{t_0}^{t} dt \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}, \tag{73}$$

für den *Vektor I. Art* $\mathfrak{q}$ die „Vierergeschwindigkeit $\mathfrak{q}$“ mit den Komponenten [3]):

1) In die Relativitätstheorie noch nicht eingeführt.

2) D. h. nach der Terminologie der vierdim. Vektoranalysis: „absoluter Betrag“ von $\mathfrak{q}$ gleich $c\sqrt{-1}$ und $\mathfrak{q}$ „normal“ zu $\mathfrak{p}$.

3) Aus Gründen der Homogenität fügen wir nicht, wie sonst üblich, den Faktor $\frac{1}{c}$ hinzu (Laue ε S. 69). Aus den Komponenten hat man natürlich eine Matrix der Form (19) herzustellen.

$$(74) \qquad \mathfrak{q}_1 = \frac{\mathfrak{v}_x}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}, \cdots, \mathfrak{q}_4 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}},$$

für den *Vektor I. Art* $\mathfrak{p}$ die „Viererbeschleunigung $\mathfrak{p}$“ [1]) mit den Komponenten:

$$(75) \qquad \mathfrak{p}_1 = \frac{\mathfrak{p}_x + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{p}\right]\right]_x}{\left(1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^2}, \cdots, \mathfrak{p}_4 = \frac{\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{p}\right)}{\left(1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^2}$$

und für den *Vektor II. Art* $\mathfrak{P}$ nach (43) die „Sechserbeschleunigung $\mathfrak{P}$“ [2]):

$$(76) \qquad \mathfrak{P} = \frac{\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{p}\right]}{\left(1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \quad -\frac{\mathfrak{p}}{\left(1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

deren Komponenten $\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_6$ der Reihe nach mit den sechs Komponenten der genannten beiden Raumvektoren übereinstimmen. Die vorstehend entwickelten Größen: Eigenzeit, Vierergeschwindigkeit, Viererbeschleunigung und Sechserbeschleunigung sind sämtlich von der Dimension einer Zeit, Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung und unterscheiden sich bei kleinen Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ unseres Punktes unmerklich wenig von den zugehörigen dreidimensionalen Größen $t-t_0$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{p}$. Außerdem besteht zwischen Viererbeschleunigung $\mathfrak{p}$ und Sechserbeschleunigung $\mathfrak{P}$ der Zusammenhang

$$(77) \qquad \mathfrak{p} = -\frac{\mathfrak{q}}{c}\,\mathfrak{P}.$$

Denn nach (71), (41), (72) und (51) wird $\mathfrak{q}\,\mathfrak{P} = \frac{1}{c}\,(\mathfrak{q}\,\bar{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{p} - \mathfrak{q}\,\bar{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{q}) = \frac{1}{c}\,(\mathfrak{q}\,\bar{\mathfrak{q}})_{11}\,\mathfrak{p} = -c\mathfrak{p}$, wie behauptet. *Die Viererbeschleunigung ist also ein zusammengesetzter Vektor* [3]).

---

1) Nicht mit der dreidimensionalen Beschleunigung $\mathfrak{p}$ unseres Punktes zu verwechseln.

2) Ein neuer Vektor, der mit dem vierdimensionalen Feldvektor $\mathfrak{H}, -\mathfrak{E}$ der Elektronentheorie große Aehnlichkeit hat. Mit seiner Hilfe lassen sich die Minkowskischen Bewegungsgleichungen auf dieselbe symbolische Form bringen, wie der Ansatz für die ponderomotorische Kraft in der Elektronentheorie.

3) In der Tat sind die Komponenten von $\mathfrak{P}$ (76) wesentlich einfacher als die von $\mathfrak{p}$ (75).

Endlich nimmt die invariante *Krümmungsgröße* f nach (69) und (71) den Wert $f \quad \frac{1}{c^4} \cdot (\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2^2 + \mathfrak{p}_3^2 \quad \mathfrak{p}_4^2)$ oder wegen (75) nach leichten Umformungen, die Gestalt:

$$f = \frac{\mathfrak{p}^2 - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{p}\right]^2}{c^4\left(1 \quad \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^3} \tag{78}$$

an. Sie ist stets positiv, da man sie (vom Faktor $\frac{1}{c^4}$ abgesehen) auf die Form

$$\frac{\mathfrak{p}^2}{\left(1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{p}\right)^2}{\left(1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^3}$$

oder auch unter Einführung der normalen und tangentialen Beschleunigungskomponenten $\mathfrak{p}_\varrho$ und $\mathfrak{p}_t$ auf

$$\frac{\mathfrak{p}_\varrho{}^2}{\left(1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^2} + \frac{\mathfrak{p}_t{}^2}{\left(1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^3}$$

bringen kann[1]). Fordert man von der Weltlinie unseres Punktes möglichste „Geradheit“ (Minimum der Krümmung f)[2]) an jeder Stelle und schreibt ihr vor, in dem beliebigen vierdimensionalen Gebilde $\Phi(x\,y\,z\,u) = 0$ enthalten zu sein, so erhält man die Minkowskischen Bewegungsgleichungen[3]) für den Punkt, falls man die Bedingung $\Phi = 0$[4]) als Ursache für das Auftreten bewegender Kräfte ansieht und dem Punkt eine invariante charakteristische Zahl μ, seine „Masse“, zuschreibt.

---

1) Führt man die transversal und longitudinal gerichteten Kraftkomponenten durch $\mathfrak{K}_\varrho = (mk)\mathfrak{p}_\varrho$ und $\mathfrak{K}_t = (mk^3)\mathfrak{p}_t$ ein (v. Brill η Art. 56), wo $k = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}$ so folgt die Invarianz von $\frac{\mathfrak{K}_\varrho}{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}} + \mathfrak{K}_t^2$. (Vgl. v. Brill ζ S. 81, Fußnote).

2) Aehnlich wie Hertz in seiner Mechanik.

3) Die Minkowskischen Kraftkomponenten werden proportional zu den Größen $\mathfrak{p}_i$ (75).

4) Φ erscheint als Potential der Kräfte.

ε) Produkte aus gewöhnlichen und Operations-Matrizen.

Art. 14. Erklärung von Vektoroperationen durch Matrizenprodukte und ihr Verhalten zur Lorentztransformation.

Die *Vektoroperationen* der vierdimensionalen Vektoranalysis lassen sich sämtlich durch Matrizenprodukte erklären. Für die *nicht differentiellen Operationen* bestätigt man leicht, daß den Matrizen:

$$(79)\quad \left|\begin{array}{l} [\mathfrak{a}\mathfrak{b}],\ [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}],\ -\mathfrak{a}\mathfrak{A}, \\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}\quad \mathfrak{A}\mathfrak{B},\quad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*),\ \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}, \\ \mathfrak{A}^{*2}-\mathfrak{A}^2,\ 2\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*,\ \mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^*-\mathfrak{A}\mathfrak{B} \end{array}\right.$$

genau der Reihe nach die vektoranalytischen Bezeichnungen[1]):

$$\left|\begin{array}{l} [\mathfrak{a}\mathfrak{b}],\ [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}],\ [\mathfrak{a}\mathfrak{A}], \\ [\mathfrak{A}\mathfrak{B}],\ [[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]],\ (\mathfrak{a}\mathfrak{b}), \\ (\mathfrak{A}\mathfrak{A}),\ (\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*),\ (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \end{array}\right.$$

entsprechen. Durch diesen Umstand gelingt es, ohne jede Rechnung festzustellen, wie sich die Größen der Vektoranalysis bei Anwendung einer Lorentztransformation verhalten, ob wie Vierervektoren, Sechservektoren, Tensoren oder Invarianten, da dies für die zugehörigen Matrizenbildungen ohne weiteres[2]) nach (33) erkannt wird.

Die *differentiellen Operationen* $\Gamma\varrho\alpha\delta$, Div, $\Delta\imath\nu$, $\mathfrak{Rot}$, $\Box$ der Vektoranalysis[3]) lassen sich durch die in (61) eingeführte Differentialmatriz ∂ erklären. *Wir definieren*:

$$(80)\quad \begin{array}{c} div\ M = \partial\,\bar{M}\ ^4) \\ grad\ M = (M\partial) \\ rot\ M = \bar{\partial}M - (\bar{M}\partial) \\ \Box\ M \quad (\partial\bar{\partial})\,M \\ \Box_{11}M\ ^5) = (\partial\partial)_{11}\,M. \end{array}$$

1) Vgl. Laue [5] § 10 und 11. Die nachfolgenden Größen sind der Reihe nach 4 Vektorprodukte, 1 Tensor und 4 skalare Produkte.

2) Man vgl. den umfangreichen Nachweis der Tensoreigenschaft von $[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]]$ bei Laue [5] S. 86.

3) Bei Sommerfeld [7] II mit Grad, Div, $\mathfrak{Div}$ bezeichnet.

4) Das 11-Element z. B. lautet: $\dfrac{\partial M_{11}}{\partial x}+\dfrac{\partial M_{12}}{\partial y}+\dfrac{\partial M_{13}}{\partial z}+\dfrac{\partial M_{14}}{\partial u}$.

5) $\Box_{11}$ bezeichnet gemäß (52) die Diagonalmatrix

$$\begin{array}{cccc} \Box & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Box & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Box & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Box \end{array},$$

wo $\Box$ für den Poincareschen Operator $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}$ steht.

und verstehen unter M eine beliebige Matrix, deren Elemente M_{ik} Funktionen von $xyzu$ sind. Führt man rechter Hand die Produkte aus, so wird z. B.:

$$grad\ M = \begin{vmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & \frac{\partial M_1}{\partial y} & \frac{\partial M_1}{\partial z} & -\frac{\partial M_1}{\partial u} \\ \frac{\partial M_2}{\partial x} & \frac{\partial M_2}{\partial y} & \frac{\partial M_2}{\partial z} & \frac{\partial M_2}{\partial u} \\ \frac{\partial M_3}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial y} & \frac{\partial M_3}{\partial z} & -\frac{\partial M_3}{\partial u} \\ \frac{\partial M_4}{\partial x} & \frac{\partial M_4}{\partial y} & \frac{\partial M_4}{\partial z} & -\frac{\partial M_4}{\partial u} \end{vmatrix},$$

wobei M_i kurz für M_{1i} steht. Da in dieser Matrix, für die übrigens die Vektoranalysis *keine* Bezeichnung[1]) hat, nur die vier Elemente M_{1i} von M auftreten[2]) und das gleiche von rot M gilt, weil nach (80) offenbar

$$rot\ M = grad\ M - grad\ M$$

ist, so kann man nach (41) auch

$$rot\ M = [\partial, M]$$

schreiben und die Matrix

$$rot^*\ M = [\partial, M]^*$$

(81)

bilden, deren Elemente aus (43) bzw. (44) zu entnehmen sind (z. B. $rot_{23}\ M = \partial_2 M_3 - \partial_3 M_2 = \frac{\partial M_{13}}{\partial y} - \frac{\partial M_{12}}{\partial z}$). Beide Matrizen sind alternierend.

Bildet man jetzt der Reihe nach die Matrizen:

$$grad\,\varrho,\ \Box\varrho,\ \Box\mathfrak{a},\ div\,\mathfrak{a},$$
$$rot\,\mathfrak{a},\ div\,\mathfrak{A},\ div\,\mathfrak{T},$$

wo ϱ, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$ die oben in (8), (19), (25) eingeführten Matrizen sind, so liefern ihre Elemente genau die in der vierdimensionalen Vektoranalysis üblichen Größen:

$$\Gamma\varrho\alpha\delta\,\varrho,\ \Box\varrho,\ \Box\mathfrak{a},\ Div\,\mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{Rot}\,\mathfrak{a},\ \Delta\imath v\,\mathfrak{A},\ \Delta\imath v\,\mathfrak{T}.$$

(82)

Hieraus folgt, daß vom Standpunkt der Matrizenrechnung aus *eine Unterscheidung zweier Divergenzen „Div“ und „Διv“ nicht erforderlich* ist.

---

1) Laue [ε] S. 238, Fußnote; *grad M* ermöglicht eine rationelle Schreibweise der hydrodynamischen Grundgleichungen.

2) Die Auszeichnung des Index 1 erklärt sich aus der Bevorzugung der ersten Zeile der Matrix ∂.

Das *Verhalten der Operationen div, grad, rot,* $\Box$ bei Ausübung von Lorentztransformationen ergibt sich aus (80) nach (33) unter der Voraussetzung, daß ∂ *ein Vierervektor* ist. Demnach gelten, wenn *I, II, inv* entsprechend eine Matrix I. Art, II. Art oder eine Invariante bezeichnen, die Regeln:

$$\begin{aligned} div\,(I, II) &= inv, I, \\ grad\,(I, inv) &= II, I, \\ rot\ I \quad\ &= II, \\ \Box\,(I, inv) &= I, inv, \\ \Box_{11}\,(I, II, inv) &= I, II, inv^{1}). \end{aligned} \tag{83}$$

Bei den doppelten Angaben sind beiderseits entweder die ersten oder die zweiten, etc. zu nehmen. Diese Regeln gelten *nicht* umgekehrt, d. h. man kann z. B. aus $div\,M = I$ nicht ohne nähere Bedingungen auf $M = II$ schließen, weil es außer (18) noch andere Transformationsformeln für M gibt (z. B. $M' = \bar{a}Ma + a - \bar{a}$), aus denen ebenfalls $div\,M = I$ hervorgeht. — Die obige Voraussetzung über ∂ ergibt sich aus den allgemeinen Formeln (63), die bei Annahme der Lorentztransformation (4) statt der allgemeinen Transformation (60) nach (65) und (61) (Funktionalmatrix $k = a$ und $\delta = \partial'$) in

$$\partial'\,M = \partial\,(a\,M),\quad \bar{\partial}'\,M = \bar{a}\,(\bar{\partial}\,M)$$

oder unter der Bedingung, daß die Differentialmatrizen ∂, ∂' nicht auf a, sondern auf die ihnen zugehörigen Matrizen zu beziehen sind, in die Relation

$$\partial' = \partial a \tag{84}$$

übergehen. *Also verhält sich* ∂ *wie ein Vierervektor*, wie behauptet.

Auf Grund von (83) lassen sich leicht *neue Matrizen I. Art, II. Art oder Invarianten* bilden. So ist z. B. nach (66) und (68) *das unbestimmte Integral*

$$\int (div\,\mathfrak{x})_{11}\,d\sigma,$$

genommen über irgend ein Stück der Weltlinie einer mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegten Stelle eines Kontinuums, eine Lorentz-

1) Es bilden also in der Elektronentheorie die 6 Größen $\Box\mathfrak{E}_x$, $\Box\mathfrak{E}_y$, $\Box\mathfrak{E}_z$; $\Box\mathfrak{H}_x$, $\Box\mathfrak{H}_y$, $\Box\mathfrak{H}_z$ einen Vektor II. Art, der im reinen Aether ($\varrho = o$) verschwindet und daher nach (18) das Verschwinden der analogen Größen $\Box'\mathfrak{E}'_{x'}$, ... für ein anderes Bezugssystem zur Folge hat. (Grundforderung des Relativitätsprinzips). — Ferner: $\Box\,\varphi$ ist im allgem. nur invariant bei invariantem φ, also z. B. für $\varphi = \mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2$ oder $= (\mathfrak{E}\mathfrak{H})$, nicht aber für eine lineare Kombination der Feldstärken $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$.

invariante, die sich nach (71), (73), (74) und mit Hilfe des rein geometrischen Satzes

$$dt \cdot div\, \mathfrak{v} = d\, ln(dV)$$

der Hydrodynamik leicht berechnen läßt; dabei bezeichnet dV das die betrachtete Stelle umgebende *unendlich kleine mitbewegte* Volumelement des Kontinuums. Man findet für das Integral den Wert $ln \frac{dV}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}$ und gelangt somit zu der bekannten Tatsache:

$$\frac{dV}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}} \cdot inv\ ^{1}). \tag{85}$$

Bezeichnet ϱ die räumliche Dichte und also ϱdV die Masse des Volumelements, die als invariant zu erklären ist, so folgt durch Division dieser Invariante mit der vorigen die Invarianz des Ausdrucks

$$\varrho^0 = \varrho \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}. \tag{86}$$

Mithin ist nach (74) $\varrho^0 \mathfrak{q}$ ein Vierervektor, dessen Komponenten nach (74)

$$\varrho \mathfrak{v}_x,\ \varrho \mathfrak{v}_y,\ \varrho \mathfrak{v}_z,\ \varrho c \tag{87}$$

lauten.

Nimmt man ferner mit den Punkten $xyzu$ der Welt unendlich kleine Verschiebungen Δx, Δy, Δz, Δu vor, die von Punkt zu Punkt nach dem Schema

$$\begin{aligned} \Delta x &= \varepsilon_1 f_1(xyzu), \\ \Delta y &= \varepsilon_2 f_2(xyzu), \\ \Delta z &= \varepsilon_3 f_3(xyzu), \\ \Delta u &= \varepsilon_4 f_4(xyzu) \end{aligned}$$

mit den sehr kleinen Konstanten ε_i wechseln (vierdimensionale Deformation)[2]), und bildet daraus analog zu (1) für jede Stelle den Vierervektor $\Delta \mathfrak{x}$, so liefert (83) in der symmetrischen Matrix II. Art

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}(\overline{grad\, \Delta \mathfrak{x}} \cdot grad\, \Delta \mathfrak{x} + \overline{grad\, \Delta \mathfrak{x}} + grad\, \Delta \mathfrak{x})$$

einen *Tensor*[3]), dessen Elemente

1) $\frac{V}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}$ ist nicht invariant, weil im allgemeinen die Geschwindigkeit innerhalb des Volumens mit dem Ort wechselt.

2) Ein für die Relativitätstheorie neuer Begriff.

3) Etwa als vierdimensionaler Deformationstensor zu bezeichnen.

$$2\,\mathfrak{T}_{11} = \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\partial \Delta x}{\partial x}$$

$$2\,\mathfrak{T}_{12} = \frac{\partial \Delta x}{\partial x}\,\frac{\partial \Delta x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta y}{\partial x}\,\frac{\partial \Delta y}{\partial y} + \cdots - \frac{\partial \Delta u}{\partial x}\,\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta y}{\partial x} + \frac{\partial \Delta x}{\partial y}$$

. . . . . .

$$2\,\mathfrak{T}_{14} = -\frac{\partial \Delta x}{\partial x}\,\frac{\partial \Delta x}{\partial u} - \cdots + \frac{\partial \Delta u}{\partial x}\,\frac{\partial \Delta u}{\partial u} + \frac{\partial \Delta u}{\partial x} - \frac{\partial \Delta x}{\partial u} \cdots .$$

die *Gestaltsänderung* des unendlich kleinen vierdimensionalen willkürlichen Bereiches $x + dx, \ldots, u + du$ um den Punkt $x\,y\,z\,u$ vollständig bestimmen, da die relativen Entfernungen $d\sigma$ und $d\sigma_1$ des Punktes $x + dx, \ldots$ gegen $x\,y\,z\,u$ vor und nach der Deformation in dem *invarianten Zusammenhang* stehen:

$$d\sigma^2 - d\sigma_1^2 = 2 \sum_{ik} \mathfrak{T}_{ik}\, d\mathfrak{x}_i\, d\mathfrak{x}_k = 2\,(\mathfrak{T}_{11}\, dx^2 + 2\,\mathfrak{T}_{12}\, dx\, dy + \cdots + \mathfrak{T}_{44}\, du^2).$$

Es mißt nämlich offenbar die Matrix $\Delta\mathfrak{x}$ die Verschiebung des Punktes $\mathfrak{x}$, und $\Delta\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}\,\overline{grad\,\Delta\mathfrak{x}}$ die des Punktes $\mathfrak{x} + d\mathfrak{x}$; die relativen Koordinaten vor und nach der Deformation werden also von den Vektoren I. Art $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{x}\,(1 + \overline{grad\,\Delta\mathfrak{x}})$ angegeben, aus denen die entsprechenden relativen Entfernungen nach Definition (66) und (52) zu

$$d\sigma^2 = -\,(d\mathfrak{x}\,\overline{d\mathfrak{x}})_{11},$$

$$d\sigma_1^2 = -\,[d\mathfrak{x}\,(1 + \overline{grad\,\Delta\mathfrak{x}})\,(1 + grad\,\Delta\mathfrak{x})\,\overline{d\mathfrak{x}}]_{11}$$

hervorgehen. Die Differenz hiervon liefert unter Einführung von $\mathfrak{T}$, wie behauptet, die Beziehung

$$d\sigma^2 - d\sigma_1^2 = 2\,(d\mathfrak{x}\,\mathfrak{T}\,\overline{d\mathfrak{x}})_{11},$$

mit der die obige nach (9) identisch ist.

Weitere Tensoren sind die symmetrischen Matrizen II. Art:

$$\frac{1}{2}\,\overline{grad\,\Delta\mathfrak{x}} \cdot grad\,\Delta\mathfrak{x} \qquad \text{und}$$

$$\frac{1}{2}\,(\overline{grad\,\Delta\mathfrak{x}} + grad\,\Delta\mathfrak{x}),$$

aus denen sich der Deformationstensor $\mathfrak{T}$ additiv zusammensetzt. Dieser geht im Falle einer unendlich kleinen Deformation, wo die Quadrate der ε_i gegen diese verschwindend klein sind, in den zweiten Tensor über. Die Invariante $\mathfrak{T}_{11} + \mathfrak{T}_{22} + \mathfrak{T}_{33} - \mathfrak{T}_{44}$ (54) reduziert sich hierbei auf den Ausdruck $\frac{\partial \Delta x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta z}{\partial z} + \frac{\partial \Delta u}{\partial u}$, der in Analogie zu der entsprechenden dreidimensionalen Größe als *vierdimensionale Dilatation* angesprochen werden kann. — Jede beliebige Deformation eines Körpers kann als *spezielle vierdimensionale Deformation* angesehen werden, bei der die Zeit nicht deformiert

wird, also Δu verschwindet. Da zudem alle Punkte in der Umgebung von $x\,y\,z$ vor und nach der Deformation *gleichzeitig* betrachtet werden, verschwinden die vierten Komponenten du und du_1 von $d\sigma$ und $d\sigma_1$, und es reduzieren sich $d\sigma^2$ bzw. $d\sigma_1^2$ nach (66) auf die negativen Quadrate $-ds^2$ und $-ds_1^2$ der dreidimensionalen Bogenelemente. Die Verschiebungen $\Delta x, \ldots$ werden von der Zeit unabhängig[1]). Die Ausdrücke $\mathfrak{T}_{ik}$ und die obige Differentialform[2]) gehen dann genau in die bekannten dreidimensionalen Bildungen über.

Art. 15. Allgemeine Relationen zwischen den Operationen div, grad, rot, $\square$.

Zwischen den Operationen *div*, *grad*, *rot*, $\square$ bestehen eine Reihe von Relationen[3]). So wird nach (80) $div\,(grad\,M) = \partial\,(\overline{grad}\,\overline{M}) = \partial\,(\overline{\partial}\,M) = (\partial\,\overline{\partial})\,M = \square\,M$, also

(88)
$$div\,(grad\,M) = \square\,M\ ^4);$$

ebenso findet man

$$div\,\overline{grad}\,\overline{M} = grad\,\overline{div\,M}$$

und daraus durch Subtraktion der vorigen Formel nach (81):

$$div\,(rot\,M) = grad\,\overline{div\,M} - \square\,M\ ^4).$$

Ferner folgt aus (81), (45), (24)

$$\partial\,\overline{rot}^*\,M = -\,\partial[\partial M]^* = -\,[\partial\partial M] = 0,$$

also gilt nach (80)

(89)
$$div\,(rot^*\,M) = 0\ ^4).$$

Weiter liefern die Formeln (57) und (58) für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \partial$ mit Rücksicht auf (80) und (81) unmittelbar die Beziehungen:

$$div\,(div\,\mathfrak{A}) = 0\ ^4),$$
$$\square_{11}\,\mathfrak{A} = rot^*\,(div\,\mathfrak{A}^*) - rot\,(div\,\mathfrak{A}),$$

von denen die zweite ein *Analogon zur Minkowskischen Identität* ist[5]). — Betrachtet man endlich das ik-Element von $\partial\,(MN)$, d. i. $\sum_{jh} \partial_{ij}(M_{jh} N_{hk})$ und denkt sich die darin angezeigte Differentiation ausgeführt, so erhält man die Summe aus zwei Polynomen, bei

1) Weil der Körper eine bestimmte unveränderliche Deformation erfährt.

2) Vgl. die Herglotzschen „Ruhdeformationen“ [δ] S. 498.

3) In diesen Relationen sind die vektoranalytischen Beziehungen als spezielle Fälle enthalten.

4) Vgl. Laue [ε] S. 80, 81.

5) Minkowski [α] Nr. (45).

denen das eine konstante M_{jh} und das andere konstante N_{hk} hat. Daher ist:

$$\partial(MN) = \partial(MN)_M + \partial(MN)_N, \tag{90}$$

wo die Indizes M und N die Konstanthaltung der betreffenden Matrizen andeuten sollen. Im zweiten Glied erstreckt sich also ∂ nur auf M, weshalb

$$\partial(MN) = \partial(MN)_M + (\partial M)N$$

geschrieben werden kann. Sind zudem M und N vertauschbar, d. h. $MN = NM$, und M und N von einander *unabhängig*[1]), so wird noch einfacher

$$\partial(MN) = (\partial N)M + (\partial M)N\,^{2}).$$

Demnach gilt allgemein (für $N = \varrho$)

$$\partial(M\varrho) = (\partial\varrho)M + (\partial M)\varrho, \tag{91}$$

weil die Diagonalmatrix ϱ mit M zusammen den genannten Bedingungen genügt.

Bildet man noch aus den alternierenden Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Matrizen

$$p = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*,$$
$$q = \mathfrak{B}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^*,$$

die nach (37) identisch gleich sind und in denen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von einander unabhängig sind, so folgt:

$$\partial q = \partial p = \partial p_{\mathfrak{A}} + \partial p_{\mathfrak{B}} = \partial q_{\mathfrak{A}} + \partial p_{\mathfrak{B}} =$$
$$\partial(\mathfrak{B}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^*)_{\mathfrak{A}} + \partial(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*)_{\mathfrak{B}}$$

oder, da sich hier ∂ in sämtlichen Gliedern nur auf die ersten Matrizenfaktoren bezieht:

$$\partial(\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*) = \partial(\mathfrak{B}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^*) =$$
$$(\partial\mathfrak{B})\mathfrak{A} + (\partial\mathfrak{B}^*)\mathfrak{A}^* + (\partial\mathfrak{A})\mathfrak{B} + (\partial\mathfrak{A}^*)\mathfrak{B}^*, \tag{92}$$

Diese Formel würde auf direktem Wege sehr mühsam zu beweisen sein[3]). Vorstehende Relationen (88) — (92) leisten besonders in der Elektronentheorie[4]) gute Dienste.

---

1) D. h. die Elemente von N können beliebig geändert werden, auch wenn man alle Elemente von M festhält und umgekehrt.

2) Setzt man hier $N = M$, so ist zwar $NM = MN$, aber N und M sind abhängig. In der Tat ist auch die hervorgehende Formel $\partial(M^2) = 2(\partial M)M$ falsch, wie der Fall $M = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ zeigt.

3) Vgl. den direkten Beweis bei Laue [ε] S. 86 und seine wenig übersichtliche Formel (133), die unserer Formel (92) entspricht.

4) Das gleiche leistet die vierdimensionale Vektoranalysis.

d) Spezielle Matrizen.

Art. 16. Ruhmatrizen und die Matrix ν.

Hat eine Stelle xyz eines bewegten Kontinuums zur Zeit t die Momentangeschwindigkeit $\mathfrak{v}$, und ist M eine beliebige Matrix, deren Elemente auf das zugrunde gelegte Koordinatensystem bezogen sind, so gibt es Lorentztransformationen („Ruhtransformationen“)[1]), nach deren Ausübung die betrachtete Stelle im gestrichenen System („Ruhsystem“) *momentan ruht* ($\mathfrak{v}' = 0$) und wodurch die (in einer für alle Bezugssysteme gültigen Form) gegebene Matrix M in die „*Ruhmatrix*“ M^0, d. h. in die analog zu M für das Ruhsystem gebildete Matrix, übergeht[2]). Man bestätigt leicht[3]), daß

(93) *zwei Matrizen gleicher Art* (I. Art, II. Art, oder invariant) *M und N gleich sein müssen, wenn ihre Ruhmatrizen M^0 und N^0 übereinstimmen, und daß es daher zu einer gegebenen Ruhmatrix M^0 nur eine einzige Matrix M irgend einer Art geben kann, aus der sie hervorgeht.*

Auf diese Weise lassen sich Gleichungen physikalischer Vorgänge oder Zustände, die nur für das Ruhsystem bekannt sind, auf ein *beliebiges* System mittels Transformation eindeutig übertragen[4]). *Hierbei zeigt sich die Ruhmatrix der in (74) genannten Vierergeschwindigkeit* $\mathfrak{q}$ *von großem Nutzen.* Wir bezeichnen sie mit $c\nu$, setzen also:

$$\nu = \frac{\mathfrak{q}^0}{c} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{94}$$

---

1) Für sie sind die vier Koeffizienten a_{i4} gleich $-\frac{1}{c}\,\mathfrak{q}_i$ (74).

2) Strenger: $M^0_{ik} = \lim_{\mathfrak{v}=0}(M_{ik})$; es ist also nicht $\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x}\right)^0 = \frac{\partial(\mathfrak{v}^0)}{\partial x^0} = 0$.

3) Mit Hilfe der Gleichungen (17), (18) und (47), wobei a als Koeffizientenmatrix einer Ruhtransformation anzusehen ist.

4) Unter der Voraussetzung des Minkowskischen *Axioms* ([α] § 8), wonach für eine ruhende Stelle genau diejenigen Gleichungen gelten, die zu bestehen hätten, falls der ganze Körper ruhte und falls, wie wir ergänzen, in den Ruhgleichungen *keine* Differentialquotienten der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auftreten.

und beachten, daß sich mit ihrer Hilfe eine Reihe *spezieller Matrizen*[1]) in die symbolische Rechnung einführen lassen. So ist unter anderem, wie die direkte Ausrechnung zeigt, für eine *beliebige* Matrix N:

$$-N\bar{\nu}\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{14} \\ 0 & 0 & 0 & N_{24} \\ 0 & 0 & 0 & N_{34} \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} \end{vmatrix},$$

für eine alternierende Matrix $\mathfrak{A}$:

$$\nu\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_4 & \mathfrak{A}_5 & \mathfrak{A}_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \nu\mathfrak{A}^* = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{95}$$

und für eine Matrix $\mathfrak{a}$ von der Form (19):

$$\mathfrak{a}(1+\bar{\nu}\nu) = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{2}).$$

1) Die Einführung solcher spezieller Matrizen wie ν in die Relativitätstheorie ist bisher noch nicht versucht worden, und doch geben gerade sie dem Matrizenkalkül eine außerordentliche Beweglichkeit.

2) Diese Matrix (rechts mit $\bar{\mathfrak{a}}$ multipliziert) ermöglicht die Einführung absoluter Beträge von gewöhnlichen Vektoren.

III. Anwendungen der reellen Symbolik auf Probleme der Relativitätstheorie.

a) Die Elektrodynamik ponderabler bewegter Substanzen [1]).

Art. 17. Die elektromagnetischen Grundgleichungen.

Durch ein *elektrisches* Kontinuum, das an der Stelle xyz zur Zeit t die Dichte ϱ, die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ und das elektromagnetische Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ aufweist, bewege sich ein *materielles* Kontinuum, das an derselben Stelle zur nämlichen Zeit die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ hat und die elektrische bzw. magnetische Erregung $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ zeigt. Dann lauten die *Grundgleichungen* für diese bewegte ponderable Stelle der Substanz:

$$\begin{aligned} rot\ \mathfrak{H} &= \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial u} + \frac{1}{c}\varrho\,\mathfrak{w}, \\ rot\ \mathfrak{E} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial u}, \\ div\ \mathfrak{D} &= \varrho, \\ div\ \mathfrak{B} &= 0. \end{aligned}$$

Die gesamte elektrische Strömung $\varrho\mathfrak{w}$ zerlegen wir durch

$$\varrho\mathfrak{w} = \varrho\mathfrak{v} + \varrho\mathfrak{u}$$

in zwei Bestandteile, von denen sich der erste $\varrho\mathfrak{v}$ mit der Materie mitbewegt und dort als eine mitbewegte *Ladung* ϱ erkannt wird und von denen der zweite $\varrho\mathfrak{u}$ ein sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ gegen die Materie bewegender elektrischer Strom ist und als *Leitungsstrom* $\mathfrak{J}$ (Intensität) zutage tritt. Man hat also:

$$\varrho\mathfrak{w} = \varrho\mathfrak{v} + \mathfrak{J}.$$

Um nun die Grundgleichungen vierdimensional und reell zu gestalten, bilden wir aus ϱ und $\mathfrak{w}$ nach (87) den *Vierervektor* $\mathfrak{s}$, den „Viererstrom", von der Form (19) mit den Komponenten

1) Hier zeigt sich erst der volle Nutzen der Matrixrechnung. Den weiter unten gegebenen Umformungen vermag die vierdimensionale Vektoranalysis nicht mehr zu folgen.

$$(96) \qquad \mathfrak{s} = \frac{1}{c}(\varrho \mathfrak{v}_x + \mathfrak{J}_x), \frac{1}{c}(\varrho \mathfrak{v}_y + \mathfrak{J}_y), \frac{1}{c}(\varrho \mathfrak{v}_z + \mathfrak{J}_z), \varrho$$

und aus den Komponenten der Raumvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ nach (25) die alternierenden Matrizen

$$(97) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{B}, -\mathfrak{E} \quad \text{und} \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{H}, -\mathfrak{D}, \end{aligned}$$

von denen $\mathfrak{F}$ *der vierdimensionale Feldvektor und* $\mathfrak{B}$ *der Verschiebungsvektor* heiße. Alsdann lauten die Grundgleichungen mit Hilfe der in (80) erklärten Divergenz:

$$(98) \qquad \begin{aligned} &\text{I.} \quad div\ \mathfrak{B} = \mathfrak{s}, \\ &\text{II.} \quad div\ \mathfrak{F}^* = 0. \end{aligned}$$

Hiernach dürfen in Uebereinstimmung mit (83) $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{B}$ *als Vektoren II. Art* angesehen werden.

Vierergeschwindigkeit $\mathfrak{q}$ (74) und Viererstrom $\mathfrak{s}$ (96) liefern weiter nach (41) den *Vektor II. Art*

$$(99) \qquad \mathfrak{C} = [\mathfrak{q}\mathfrak{s}],$$

dessen Komponenten nach (43) durch die beiden Raumvektoren

$$(100) \qquad \mathfrak{C} = \frac{\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{J}\right]}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}, - \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}$$

gegeben sind und also nur vom Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ abhängen. Wir nennen $\mathfrak{C}$ *den „Sechserstrom“* [1]). Für seinen dualen Vektor $\mathfrak{C}^*$ gilt nach (45) und (24) offenbar die Relation:

$$(101) \qquad \mathfrak{q}\mathfrak{C}^* = \mathfrak{q}\,[\mathfrak{q}\mathfrak{s}]^* = [\mathfrak{q}\mathfrak{q}\mathfrak{s}] = 0.$$

Art. 18. Die Zusatzbedingungen.

Die Grundgleichungen I und II sind nun durch „Zusatzbedingungen“, d. h. durch Angabe des Zusammenhangs der Induktionen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ und des Leitungsstromes $\mathfrak{J}$ mit dem elektromagnetischen Felde $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ zu ergänzen. Für eine *ruhende* Körperstelle ($\mathfrak{v} = 0$) ist dieser Zusammenhang erfahrungsgemäß durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^0 &= \varepsilon^0 \mathfrak{E}^0, \\ \mathfrak{B}^0 &= \mu^0 \mathfrak{H}^0, \\ \mathfrak{J}^0 &= \sigma^0 \mathfrak{E}^0 \end{aligned}$$

1) Die Existenz dieses Vektors hat man bisher nicht beachtet. Aus ihm und den Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{B}$ (97) kann man nach (53) elf verschiedene Lorentzinvarianten bilden.

gegeben, worin ε, μ, σ Funktionen von $xyzt$ sind und der Reihe nach die „Dielektrizitätskonstante“, „magnetische Permeabilität“ und „elektrische Leitfähigkeit“ der Substanz an der betrachteten Körperstelle bezeichnen. Bildet man jetzt aus den alternierenden Matrizen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{C}$ (97, 100) nach (95) die Matrizen:

$$\nu\mathfrak{F}^{1}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{E}_x & \mathfrak{E}_y & \mathfrak{E}_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad -\nu\mathfrak{V} = \cdots, \text{ etc.},$$

und aus ε, μ, σ Diagonalmatrizen (8), so lassen sich vorstehende Gleichungen *symbolisch* durch

$$\begin{aligned} -\nu\mathfrak{V}^0 &= -\nu\mathfrak{F}^0\varepsilon^0, \\ \nu\mathfrak{F}^{*0} &= \nu\mathfrak{V}^{*0}\mu^0, \\ -\nu\mathfrak{C}^0 &= -\nu\mathfrak{F}^0\sigma^0 \end{aligned}$$

ausdrücken, oder. wenn man für ν nach (94) seinen Wert $\frac{\mathfrak{q}^0}{c}$ setzt, durch:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{q}\mathfrak{V})^0 &= (\varepsilon\mathfrak{q}\mathfrak{F})^0, \\ (\mathfrak{q}\mathfrak{F}^*)^0 &= (\mu\mathfrak{q}\mathfrak{V}^*)^0, \\ (\mathfrak{q}\mathfrak{C})^0 &= (\sigma\mathfrak{q}\mathfrak{F})^0. \end{aligned}$$

Erklärt man jetzt ε, μ, σ als Lorentzinvarianten [2]), so enthalten vorstehende Klammern nach (33) nur Vektoren I. Art, und der Satz (93) ist anwendbar. *Also gelten für ein beliebiges Bezugssystem, in dem die betrachtete Körperstelle die Geschwindigkeit* $\mathfrak{v}$ *besitzt, die „Zusatzgleichungen“* [3]):

1) Obwohl ν eine Lorentzinvariante ist, darf $\nu\mathfrak{F}$ nicht als eine Matrix II. Art angesehen werden; dies ist nur bei Diagonalmatrizen angängig [Folge von (18)].

2) Diese Annahme ist ausdrücklich zu betonen, da die Größen ε, μ, σ nach den Vorstellungen von H. A. Lorentz eine verwickelte Bedeutung haben hinsichtlich des inneren Aufbaues der materiellen Körper.

3) Da sich Minkowski zur Ableitung dieser Gleichungen dauernd im dreidimensionalen Raum bewegt (α S. 24), ist er zu weitläufigeren Betrachtungen genötigt. Gleichung V gibt er in der Form $\mathfrak{s} + \frac{1}{c^2}(\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{s}})\mathfrak{q} = -\frac{\sigma}{c^2}\mathfrak{q}\mathfrak{F}$ (nach unserer Bezeichnung) an (Minkowski α S. 38 *E*). Daß sich hier die linke Seite in $-\frac{1}{c^2}\mathfrak{q}[\mathfrak{q}\mathfrak{s}]$ umformen läßt, beruht auf der Erklärbarkeit von $\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{s}}$ als Matrix (49).

$$\text{III. } \mathfrak{q}\mathfrak{B} = \varepsilon \mathfrak{q}\mathfrak{F},$$
$$\text{(102)} \qquad \text{IV. } \mathfrak{q}\mathfrak{F}^* = \mu \mathfrak{q}\mathfrak{B}^*,$$
$$\text{V. } \mathfrak{q}\mathfrak{C} = \sigma \mathfrak{q}\mathfrak{F},$$

von denen sich die letzte wegen

$$\mathfrak{q}\mathfrak{C}^* = 0$$

(101) mit Hilfe von (58) nach $\mathfrak{C}$ auflösen läßt: $(\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}})_{11}\mathfrak{C} = \sigma[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}\mathfrak{F}]$ oder nach (72)

$$\text{(103)} \qquad \text{V}'. \quad \mathfrak{C} = -\frac{\sigma}{c^2}[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}\mathfrak{F}].$$

In *dreidimensionaler* Form lauten III, IV und V′ nach (34), (35), (43) vektoriell:

$$\mathfrak{D} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{H}\right] = \varepsilon\left\{\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{B}\right]\right\},$$
$$\mathfrak{B} - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{E}\right] = \mu\left\{\mathfrak{H} - \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{D}\right]\right\},$$
$$\mathfrak{J} = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\left\{\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{B}\right] - \frac{\mathfrak{v}}{c}\left(\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{E}\right)\right\},$$

wovon jede Gleichung drei Komponentengleichungen von III, IV, V′ zusammenfaßt; die vierten Komponentengleichungen sind als eine Folge der drei ersten belanglos. Vorstehende Gleichungen sind bekannte Ansätze (Laue [ε] S. 150/151).

Formelle Uebereinstimmung von (102) *mit den Maxwellschen Beziehungen* $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}, \ldots$ erreicht man, wenn man in (102) die rechtsstehenden Vektoren I. Art $\mathfrak{q}\mathfrak{F}, \ldots$ der Reihe nach mit $-cE$, cH, $-cE$ und die linksstehenden entsprechend mit $-cD$, cB, $-cJ$ bezeichnet und dabei E, H, D, B, J als Verallgemeinerungen von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{J}$ ansieht. Im Fall der Ruhe reduzieren sich nämlich die Komponenten von E, H, $D, \ldots$ nach (94) und (95) oder (34) und (35) auf die von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}, \ldots$[1]), weshalb wir E, H, $D, \ldots$ entsprechend die „elektrische Ruhkraft", die „magnetische Ruhkraft"[2]), die „elektrische Ruhinduktion", . . ., den „Ruh-Leitungsstrom" nennen können. Zwei dieser Vektoren sind unabhängig, z. B.;

$$\text{(104)} \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{q}\mathfrak{F} = -cE \quad \text{und} \\ \mathfrak{q}\mathfrak{B}^* = cH, \end{array} \right.$$

während die übrigen nach (102) davon abhängen:

1) Deshalb ausnahmsweise Anwendung von großen Buchstaben für Vektoren I. Art.

2) Nach Minkowski [α] S. 33, 34.

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{V} = -\varepsilon c E,$$
$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{F}^* = \mu c H.$$

(104) Dem Poyntingschen Strahlungsvektor $\mathfrak{S} = c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ entspricht in der 4. Dimension *der Vektor I. Art*

$$[\mathfrak{q} E H] = S,$$

der sich im Fall der Ruhe ($\mathfrak{v} = 0$) nach (74) und (23) auf jenen reduziert. Zudem steht er auf E und H „*senkrecht*“, wenn unter „*Normalität*“ zweier Vektoren I. Art $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ (in Zeichen $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$) das beiderseitige Verschwinden der Gleichung (50) verstanden wird. Nach (45), (46) und (57) ist beispielsweise $S\overline{E} = [\mathfrak{q} EH]\,\overline{E} = E[H\mathfrak{q}]^* E = 0$ und damit $S \perp E$. Mit Minkowski *nennen wir* S *den* „*Ruhstrahl*“. Multipliziert man (104) rechtsseitig mit $\bar{\mathfrak{q}}$, so verschwinden nach (57) die linken Seiten und es wird daher die Vierergeschwindigkeit $\mathfrak{q}$ senkrecht zu E, H und S.

(105) *Von den vier Vektoren I. Art* $\mathfrak{q}$, E, H, S *sind also je zwei normal zueinander, ausgenommen* E *und* H.

Vertauscht man endlich die Größen

$$\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}^*\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}^*\,E\,H\,\varepsilon\,\mu$$

(106) entsprechend mit

$$\mathfrak{V}^* - \mathfrak{V}\,\mathfrak{F}^* - \mathfrak{F} - H\,E\,\mu\,\varepsilon$$

und läßt $\mathfrak{q}$, c, S unverändert, so gehen die Gleichungen (104) in sich selbst über. Folgerungen aus ihnen bleiben also richtig, wenn man vorstehende Vertauschung vornimmt.

Art. 19. Der elektrodynamische Welttensor.

Die Bestimmung der rein elektrodynamischen Größen: der Maxwellschen Spannungen p, des Energiestromes $\mathfrak{S}$, der Impulsdichte $\mathfrak{g}$ und der Energiedichte W (im Volumen 1) für ponderable bewegte Substanzen (an der Stelle $xyzt$) geschieht durch Ermittlung der Matrix:

$$\mathfrak{T} = \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} & c\,\mathfrak{g}_x \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} & c\,\mathfrak{g}_y \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} & c\,\mathfrak{g}_z \\ \frac{1}{c}\mathfrak{S}_x & \frac{1}{c}\mathfrak{S}_y & \frac{1}{c}\mathfrak{S}_z & W \end{vmatrix} \tag{107}$$

Diese Matrix muß von II. Art sein, da sie es, wie bekannt, in der Elektronentheorie ist, und hat sich im Fall des *ruhenden* Körpers

auf die durch die Erfahrung gegebene Ruhmatrix $\mathfrak{T}^0$ mit den Elementen:

$$p_{xx} = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) - \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x, \ldots,$$

$$p_{xy} = p_{yx} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y), \ldots,$$

$$c\mathfrak{g} = \frac{1}{c}\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] \quad \text{und}$$

$$W = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}),$$

wo der Kürze wegen der obere Index ^{0} fortgelassen ist, zu reduzieren[1]). Nach Satz (93) ist durch diese beiden Angaben die Matrix $\mathfrak{T}$ für ein *beliebiges* System eindeutig bestimmt.

Zu ihrer Berechnung[2]) ersetze man in (39) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch die in (97) erklärten Vektoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{V}$ und bilde die Elemente

$$M_{12}, M_{21};\ M_{14}, M_{41};\ M_{11}, M_{44}$$

der dort definierten Matrix M. Man findet:

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned} M_{12} &= \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y,\\ M_{21} &= \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x,\\ M_{14} &= -[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_x,\\ M_{41} &= -[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x,\\ M_{11} &= \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}),\\ M_{44} &= -\frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) - \frac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}). \end{aligned}\right.$$

Hieraus lassen sich die Erfahrungswerte $p_{xx}, \ldots$ zusammensetzen, und daher die Ruhmatrix $\mathfrak{T}^0$ in die Form:

$$\mathfrak{T}^0 = \begin{vmatrix} -M_{11} & -\frac{1}{2}(M_{12}+M_{21}) & -\frac{1}{2}(M_{13}+M_{31}) & -M_{41}\\ \frac{1}{2}(M_{12}+M_{21}) & M_{22} & -\frac{1}{2}(M_{23}+M_{32}) & -M_{42}\\ \frac{1}{2}(M_{13}+M_{31}) & -\frac{1}{2}(M_{23}+M_{32}) & -M_{33} & -M_{43}\\ -M_{41} & -M_{42} & -M_{43} & -M_{44} \end{vmatrix}$$

bringen. Durch Addition der symmetrischen Matrix $\frac{1}{2}(M + \bar{M})$ folgt weiter:

1) Wir entnehmen diese Werte den bei Laue [ε] S. 165 gemachten Angaben.

2) Wir ermitteln sie auf vierdimensionalem, nicht wie Abraham [ϑ] auf dreidimensionalem Wege.

$$\mathfrak{T}^0+\frac{1}{2}(M+\bar{M}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(M_{14}-M_{41}) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(M_{24}-M_{42}) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(M_{34}-M_{43}) \\ \frac{1}{2}(M_{14}-M_{41}) & \frac{1}{2}(M_{24}-M_{42}) & \frac{1}{2}(M_{34}-M_{43}) & 0 \end{vmatrix}$$

oder, wenn man zur Abkürzung die alternierende Matrix $N = \frac{1}{2}(M-\overline{M})$ einführt, für die $N_{44}=0$ ist,

$$\mathfrak{T}^0+\frac{1}{2}(M+\overline{M}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{14} \\ 0 & 0 & 0 & N_{24} \\ 0 & 0 & 0 & N_{34} \\ N_{14} & N_{24} & N_{34} & 2N_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{14} \\ 0 & 0 & 0 & N_{24} \\ 0 & 0 & 0 & N_{34} \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{14} & N_{24} & N_{34} & N_{44} \end{vmatrix}.$$

Nach (95) lassen sich die beiden rechten Matrizen, von denen die zweite die Transponierte der ersten ist, symbolisch darstellen. Man hat also

$$\mathfrak{T}^0+\frac{1}{2}(M+M) = -N\bar{r}\nu-\bar{\nu}\nu N$$

und gewinnt daher, wenn man für N seinen Wert einsetzt und den oberen Index ^{0} wieder anfügt, *für die Ruhmatrix* $\mathfrak{T}^0$ *die symbolische Darstellung*:

$$\mathfrak{T}^0 = \frac{1}{2}\bar{r}\nu(M-\bar{M})^0 - \frac{1}{2}(M-\bar{M})^0\bar{r}\nu - \frac{1}{2}(M+\bar{M})^0.$$

Um nun hieraus $\mathfrak{T}$ zu gewinnen, ersetze man nach (94) r durch $\frac{\mathfrak{q}^0}{c}$, schreibe also

$$\mathfrak{T}^0 = \left[\frac{1}{2}\frac{\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}}{c^2}(M-\overline{M}) - \frac{1}{2}(M-\overline{M})\frac{\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}}{c^2} - \frac{1}{2}(M+\overline{M})\right]^0$$

und beachte die Matrix der Klammer. Sie ist, da nach (37) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} M+M &= \mathfrak{F}\mathfrak{V}+\mathfrak{F}^*\mathfrak{V}^*, \\ M-M &= \mathfrak{F}\mathfrak{V}-\mathfrak{V}\mathfrak{F} \end{aligned} \tag{109}$$

bestehen, wegen der Regeln (33) von II. Art. Dasselbe gilt von $\mathfrak{T}$.

Also besteht nach (93) allgemein die symbolische Gleichung:

$$(110) \qquad \mathfrak{T} = \frac{\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}}{2c^2}(M - \overline{M}) - (M - \overline{M})\frac{\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}}{2c^2} - \frac{1}{2}(M + \overline{M}).$$

Damit ist die Matrix $\mathfrak{T}$ gefunden. Da sie, wie durch Transponieren hervorgeht, symmetrisch ist, stellt sie einen *Tensor* dar und wird darum der elektrodynamische „Welt- oder Spannungstensor" genannt[1]). Unter Annahme der Minkowskischen Zusatzbedingungen (102), aus denen leicht (s. 116) die Relationen $M - \overline{M} = \frac{\varkappa}{c^2}(\bar{\mathfrak{q}}S - \bar{S}\mathfrak{q})$ und damit nach (51), (72), (105) $\mathfrak{q}(M - \overline{M}) = -\varkappa S$ hervorgehen und die also den Ausdruck

$$-\frac{\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}}{2c^2}(M - \bar{M}) - (M - \bar{M})\frac{\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}^{2)}}{2c^2} - \frac{1}{2}(M - \overline{M})$$

zum Verschwinden bringen, kann unser Tensor durch Addition dieses Ausdrucks zu $\mathfrak{T}$ *auf die einfachere Form:*

$$(111) \qquad \mathfrak{T} = (\overline{M} - M)\frac{\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}}{c^2} - M$$

gebracht werden. *Dreidimensional* lautet $\mathfrak{T}$, indem man nach (9) zum ik-Element übergeht und $w_1\ w_2\ w_3\ w_4$ für $\mathfrak{v}_x\ \mathfrak{v}_y\ \mathfrak{v}_z\ c$ schreibt:

$$(112) \qquad \mathfrak{T}_{ik} = -M_{ik} + \frac{w_k}{c^2 - \mathfrak{v}^2}\sum_h^h w_h (M_{hi} - M_{ih}).$$

Dabei sind die Elemente von M aus (108) zu entnehmen. Unter anderem folgen hieraus für $\mathfrak{T}_{4i}$, d. h. nach (107) für W und $\frac{1}{c}\mathfrak{S}$, nach einigen Umformungen die *allgemeinen* Ausdrücke:

$$W = \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) + \frac{c}{c^2 - \mathfrak{v}^2}(\mathfrak{v}, [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - [\mathfrak{D}\mathfrak{B}]),$$

$$\frac{1}{c}\mathfrak{S} = c\mathfrak{g} = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] + \frac{\mathfrak{v}}{c^2 - \mathfrak{v}^2}(\mathfrak{v}, [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - [\mathfrak{D}\mathfrak{B}]),$$

in Uebereinstimmung mit Abraham.

Art. 20. Feldvektor, Verschiebungsvektor und Welttensor als Funktionen der Minkowskischen Vektoren E, H und S.

Die Matrizen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{T}$ (97, 110) lassen sich durch die Minkowskischen Vektoren E, H und S (s. 104) ausdrücken. Man verwende dabei zur Abkürzung die Matrizen:

---

1) Aus ihrer Symmetrie folgt nach (107) unter anderem der Satz von der Trägheit der Energie: $\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S}$.

2) Negative Transponierte des ersten Gliedes.

$$(113)\quad \left\{\begin{array}{c} [\mathfrak{q}E]=\mathfrak{A},\\ [\mathfrak{q}H]^*=\mathfrak{B},\\ \frac{1}{2}(E\overline{E})_{11}=\alpha,\\ \frac{1}{2}(H\overline{H})_{11}=\beta \text{ und}\\ \varepsilon\mu\quad 1=\varkappa, \end{array}\right.$$

von denen die drei letzten als Diagonalmatrizen vertauschbar sind, und beachte, daß bei Anwendung der Vertauschung (106) die Größen:

$$(114)\quad \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^*\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}^*\,\alpha\,\beta\,\varkappa\\ \text{entsprechend in}\\ \qquad\qquad \mathfrak{B}^*-\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}^*-\mathfrak{A}\,\beta\,\alpha\,\varkappa \end{array}\right.$$

übergehen. *Dann erhält man für Feldvektor* $\mathfrak{F}$ *und Verschiebungsvektor* $\mathfrak{B}$ *die* gewünschten *Darstellungen*[1]):

$$(115)\quad \left\{\begin{array}{c} c\,\mathfrak{F}\ =\mathfrak{A}\ +\mu\,\mathfrak{B},\\ c\,\mathfrak{F}^*=\mathfrak{A}^*+\mu\,\mathfrak{B}^*,\\ c\,\mathfrak{B}^*=\mathfrak{B}^*+\varepsilon\,\mathfrak{A}^*,\\ c\,\mathfrak{B}\ =\mathfrak{B}\ +\varepsilon\,\mathfrak{A}, \end{array}\right.$$

weil die erste dieser Relationen nach (58) die Auflösung der Definitionsgleichungen $\mathfrak{q}\mathfrak{F}=-cE$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{F}^*=\mu cH$ in (104) nach $\mathfrak{F}$ ist und die drei anderen Relationen aus dieser durch Bildung der dualen Vektoren und Anwendung der Vertauschungen (106) und (114) hervorgehen. — Zur *Umformung von* $\mathfrak{T}$ bilde man weiter aus (115) die Matrizen in (109) und beachte die nach (37) bestehende Identität $\mathfrak{B}\mathfrak{A}+\mathfrak{B}^*\mathfrak{A}^*=\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*$; dann folgt zunächst

$$\begin{aligned} c^2(M+\overline{M}) &= \varepsilon(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}^{*2})+\mu(\mathfrak{B}^2+\mathfrak{B}^{*2})\\ &\quad +(\varepsilon\mu+1)(\mathfrak{A}\mathfrak{B}+\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*),\\ c^2(M-\overline{M}) &= \varkappa(\mathfrak{B}\mathfrak{A}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}), \end{aligned}$$

worin noch für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ihre in (113) genannten Werte einzusetzen sind. Dies geschieht durch Berechnung der Matrizen $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^{*2}$, ..., wie folgt. Man findet aus (113) nach (41), (105, d. h. $\mathfrak{q}\perp E$), (51) und (72):

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^2 &= (\bar{\mathfrak{q}}E-E\bar{\mathfrak{q}})(\bar{\mathfrak{q}}E-\bar{E}\mathfrak{q})\\ &= c^2\bar{E}E-2\alpha\,\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}, \end{aligned}$$

ferner nach (41), (45), (24) und (104);

1) Bereits bei Minkowski [α], Formeln (55) und (56).

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\bar{\mathfrak{q}}E - \overline{E}\,\mathfrak{q})\,[\mathfrak{q}H]^* = \bar{\mathfrak{q}}\,[E\,\mathfrak{q}H] - \overline{E}[\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}H]$$
$$= -\,\bar{\mathfrak{q}}\,S$$

und endlich, weil

$$\mathfrak{q}\mathfrak{A}^* = [\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}E] = 0 \qquad \text{und}$$
$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{A} \;= \mathfrak{q}(\bar{\mathfrak{q}}E - \overline{E}\,\mathfrak{q}) = -\,c^2 E \quad \text{ist,}$$
$$\mathfrak{q}\,(\mathfrak{A}^{*2} - \mathfrak{A}^2)\,\bar{\mathfrak{q}} = -\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{A}^2\,\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}\,\mathfrak{A}\cdot\overline{\mathfrak{q}\,\mathfrak{A}} = c^4 E\,\overline{E}$$

oder, da die Klammer nach (40) vertauschbar ist, durch Uebergang zum 11-Element $-c^2(\mathfrak{A}^{*2} - \mathfrak{A}^2) = c^4\,(E\overline{E})_{11}$, d. h. nach (113):

$$\mathfrak{A}^{*2} = \mathfrak{A}^2 - 2\,c^2\alpha = c^2\,\overline{E}E - 2\alpha\,(c^2 + \bar{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{q}).$$

Mit diesen Werten für $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^{*2}$, aus denen durch die Vertauschungen (106) und (114) und durch Transponieren die noch fehlenden Produkte $\mathfrak{B}^{*2}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, ... hervorgehen, verwandeln sich die vorigen Gleichungen in

$$(116)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(M + \overline{M}) = (\varepsilon\,\overline{E}\,E + \mu\overline{H}H) - (\varepsilon\alpha + \mu\beta)\left(1 + \frac{2\bar{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{q}}{c^2}\right) \\ \qquad\qquad - \frac{\varkappa + 2}{2c^2}\,(\bar{\mathfrak{q}}\,S + \overline{S}\,\mathfrak{q}), \\ \frac{1}{2}(M - \overline{M}) = \frac{\varkappa}{2c^2}\,(\bar{\mathfrak{q}}\,S - \overline{S}\,\mathfrak{q})\,^{1}). \end{cases}$$

Setzt man dies nun in den Ausdruck (110) für $\mathfrak{T}$ ein, dessen zweites Glied die Transponierte des ersten ist, und berücksichtigt die Normalität von $\mathfrak{q}$ und S (s. 105), so folgt nach leichten Umformungen als gesuchte *Darstellung des Welttensors* $\mathfrak{T}$ *durch die Minkowskischen Ruhvektoren* E, H und S der Ausdruck:

$$(117)\quad \mathfrak{T} = (\varepsilon\alpha + \mu\beta)\left(1 + \frac{2\bar{\mathfrak{q}}\,\mathfrak{q}}{c^2}\right) - (\varepsilon\,\overline{E}\,E + \mu\overline{H}H) + \frac{1}{c^2}\,(\bar{\mathfrak{q}}\,S + \overline{S}\,\mathfrak{q}),$$

der in *dreidimensionaler* Form nach (36)

$$\mathfrak{T}_{ik} = (\varepsilon\alpha + \mu\beta)\left(1_{ik} + \frac{2\mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_k}{c^2}\right) - (\varepsilon E_i E_k + \mu H_i H_k)$$
$$+ \frac{1}{c^2}\,(\mathfrak{q}_i S_k + S_i\,\mathfrak{q}_k)$$

lautet, und hierin ist nach (113) und (52)

$$\alpha = \frac{1}{2}\,(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 - E_4^2),$$
$$\beta = \frac{1}{2}\,(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - H_4^2).$$

1) Bildet man hieraus durch Subtraktion $\overline{M}$, so erhält man genau die Matrix „S“ von Minkowski ([α] Formel (83)), die er aus Mangel an Bezeichnungen dreidimensional angeben muß; Minkowski gibt seine Umformung ohne näheren Beweis an.

Art. 21. Die ponderomotorischen Kräfte.

Die Betrachtung der aus dem Welttensor $\mathfrak{T}$ gebildeten Matrix

$$\mathfrak{f} = -div\,\mathfrak{T} \tag{118}$$

führt, wie folgt, zu den „ponderomotorischen Kräften". Die genannte Matrix $\mathfrak{f}$ ist nach (83) ein Vektor I. Art. Seine Komponenten lauten nach (80) und (107)

$$\mathfrak{f}_1 = -div_x\, p - \frac{\partial \mathfrak{g}_x}{\partial t}, \ldots,$$

$$c\mathfrak{f}_4 = -div\ \mathfrak{S} - \frac{\partial W}{\partial t}$$

und führen durch Integration über einen im Bezugssystem ruhenden abgeschlossenen Raum mit dem Volumelement $d\tau$, dem Oberflächenelement $d\sigma$ und der zugehörigen inneren Normale ν und durch Anwendung des Satzes

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, d\tau = -\int \varphi \cos(\nu x)\, d\sigma, \ldots$$

zur Verwandlung von Raum- in Oberflächenintegrale zu den Gleichungen:

$$\int p_{\nu x}\, d\sigma = \int \mathfrak{f}_1\, d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{g}_x\, d\tau, \ldots$$

$$\int \mathfrak{S}_\nu\, d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int W d\tau + \int c\mathfrak{f}_4\, d\tau,$$

worin $p_{\nu x}$ die x-Komponente der auf $d\sigma$ wirkenden Oberflächenkraft ist. Aus diesen Gleichungen ergibt sich die Bedeutung der Größen $\mathfrak{f}_i$. Die erste Gleichung besagt: Die gesamte, auf die Oberfläche des abgeschlossenen Raumes wirkende Kraft überträgt sich auf dessen Inneres und zerfällt dort in zwei Bestandteile; der erste Teil bewirkt einen Zug $\mathfrak{f}_1\, d\tau$ an jedem Volumelement $d\tau$, während der zweite zur Erhöhung des elektromagnetischen Impulses $\mathfrak{g}_x\, d\tau$ dient. Der erste Teil erscheint als ponderomotorische Wirkung; also können $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$ als die Komponenten der ponderomotorischen Kraft pro Volumeneinheit angesehen werden.

Die zweite Gleichung dagegen sagt aus: die von außen in der Zeit 1 durch die Oberfläche in den Raum einströmende Energie findet sich im Inneren in zwei Teilen wieder. Der eine Teil dient zur Vermehrung der elektromagnetischen Energie $W d\tau$ in jedem Element $d\tau$ und daher der andere Teil $(c\mathfrak{f}_4)\, d\tau$ zur Anhäufung mechanischer Energie, von der ein Teil für die Arbeitsleistung

$$(\mathfrak{v}_x \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{v}_y \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{v}_z \mathfrak{f}_3)\, d\tau$$

1) Bei Laue [ε] S. 161 die wichtigste Gleichung.

der ponderomotorischen Kraft (in der Zeit 1) verbraucht wird. Der Rest an entstehender Energie werde mit $Q\,d\tau$ bezeichnet. Also ist die Größe $c\mathfrak{f}_4$ gleich

$$(\mathfrak{v}_x \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{v}_y \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{v}_z \mathfrak{f}_3) + Q,$$

d. h. gleich der Leistung der ponderomotorischen Kraft am Volumen 1, vermehrt um eine pro Volumen- und Zeiteinheit entstehende mechanische Energie.

Demnach erklären wir in (118) den Vektor I. Art $\mathfrak{f}$ *durch die Matrix*[1]*:*

$$\text{(119)} \qquad \mathfrak{f} = \begin{vmatrix} \mathfrak{F}_x & \mathfrak{F}_y & \mathfrak{F}_z & \frac{1}{c}\{(\mathfrak{v}\mathfrak{F}) + Q\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und verstehen unter $\mathfrak{F}$ *die Dichte der ponderomotorischen Kraft, unter* $(\mathfrak{v}\mathfrak{F})$ *ihre Leistung und unter* Q *eine pro Volumen- und Zeiteinheit entstehende mechanische Energie* (zum größten Teil Joulesche Wärme) an der Stelle $xyzt$, wo die Materie die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ besitzt. $\mathfrak{f}$ heiße die „*Viererkraft*".

Art. 22. Die Berechnung der Matrix $\mathfrak{f}$.

Die explizite Berechnung von $\mathfrak{F}$ *und* Q in (119) geschieht nach (118) durch Bestimmung der Matrix *div* $\mathfrak{T}$. Zu diesem Zweck addieren wir die drei Gleichungen (116) und (117):

$$\mathfrak{T} + M = -\tfrac{\varkappa}{c^2}\, \bar{S}\, \mathfrak{q},$$

bilden beiderseits mit Rücksicht auf (118) und (80) die Divergenz, was zu

$$\text{(120)} \qquad \mathfrak{f} = div\, M + \tfrac{1}{c^2}\, \partial\, (\varkappa \bar{\mathfrak{q}}\, S)$$

führt, und berechnen hier jedes Glied einzeln.

Das *erste* Glied, in dem M die aus (37) für $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{V}$ hervorgehende Matrix ist, läßt sich nach (80), (37) und (98) in

$$\begin{aligned} div\, M = \partial \overline{M} &= \partial\, \overline{M}_{\mathfrak{F}} + \partial\, \overline{M}_{\mathfrak{B}} \\ &= \partial(\mathfrak{V}\mathfrak{F} + \varrho)_{\mathfrak{F}} + \partial(\mathfrak{F}^*\mathfrak{V}^* - \varrho)_{\mathfrak{V}} \\ &= (\partial\, \mathfrak{V})\mathfrak{F} + \partial \varrho_{\mathfrak{F}} + (\partial\, \mathfrak{F}^*)\mathfrak{V}^* - \partial \varrho_{\mathfrak{V}} \\ &= -\mathfrak{s}\mathfrak{F} + \partial \varrho_{\mathfrak{F}} - \partial \varrho_{\mathfrak{V}} \end{aligned}$$

oder in

$$\text{(121)} \qquad div\, M = -\mathfrak{s}\mathfrak{F} + \mathfrak{t}$$

1) Laue [ε] S. 166.

umformen[1]). Zur Berechnung des hier auftretenden Vektors I. Art

$$\mathfrak{t} = \partial \varrho_{\mathfrak{F}} - \partial \varrho_{\mathfrak{V}}{}^{2}),$$

in welchem die Diagonalmatrix ϱ nach (40) durch

$$2\varrho = \mathfrak{V}^* \mathfrak{F}^* - \mathfrak{F}\mathfrak{V}$$

gegeben ist, bilden wir seine k-Komponente

$$\mathfrak{t}_k = \partial_k \varrho_{\mathfrak{F}} - \partial_k \varrho_{\mathfrak{V}},$$

die mittels der vertauschbaren Diagonalmatrizen

$$\lambda = 2\,\mathfrak{t}_k,$$
$$\Delta = \partial_k$$

in $\lambda = \Delta 2\varrho_{\mathfrak{F}} - \Delta 2\varrho_{\mathfrak{V}}$ übergeht, und setzen hier für 2ϱ seinen Wert ein. Dies gibt, wenn man die Differentiation Δ bei konstantem $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{V}$, wie angegeben, ausführt und zur Abkürzung

$$A = (\Delta \mathfrak{F})\mathfrak{V} - \mathfrak{F}\Delta\mathfrak{V},$$
$$B = (\Delta \mathfrak{V}^*)\mathfrak{F}^* - \mathfrak{V}^*\Delta\mathfrak{F}^*$$

setzt,

$$\lambda = A + B.$$

Die Bestimmung von A (B geht durch die Vertauschung (106) daraus hervor) geschieht durch Multiplikation der nach (102 III) bestehenden Gleichung $(\mathfrak{V} - \varepsilon\mathfrak{F})\,\bar{\mathfrak{q}} = 0$ mit Δ und Ausführung der Differentiation an den einzelnen Gliedern. Es folgt:

$$(\Delta\mathfrak{V} - \varepsilon\Delta\mathfrak{F} - \Delta\varepsilon\cdot\mathfrak{F})\,\bar{\mathfrak{q}} + (\mathfrak{V} - \varepsilon\mathfrak{F})\,\Delta\bar{\mathfrak{q}} = 0$$

oder, wenn nach (104) $\mathfrak{F}\bar{\mathfrak{q}} = cE$ geschrieben und die zweite Klammer durch (115) ausgedrückt wird,

$$(\Delta\mathfrak{V} - \varepsilon\Delta\mathfrak{F})\,\mathfrak{q} = cE\,\Delta\varepsilon + \frac{\varkappa}{c}\mathfrak{B}\Delta\bar{\mathfrak{q}}.$$

Linksseitige Multiplikation mit $\mathfrak{q}\mathfrak{F} = -cE$ (104) und Berücksichtigung von (102), (113), (45) und (104) führt auf:

$$\mathfrak{q}(\mathfrak{F}\Delta\mathfrak{V} - \mathfrak{V}\Delta\mathfrak{F})\,\bar{\mathfrak{q}} = -c^2 E\bar{E}\,\Delta\varepsilon + \varkappa S\Delta\bar{\mathfrak{q}}$$

oder, da die Matrix $(\mathfrak{q}\mathfrak{V}\Delta\mathfrak{F})\mathfrak{q}$ wegen ihrer Form (49) mit ihrer Transponierten $\mathfrak{q}\Delta\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{V}\bar{\mathfrak{q}}$ übereinstimmt, auf:

$$-\mathfrak{q}A\bar{\mathfrak{q}} = -c^2 E\bar{E}\,\Delta\varepsilon + \varkappa S\Delta\bar{\mathfrak{q}}.$$

Durch die Vertauschung (106) folgt die analoge Gleichung für B, die zur vorigen addiert

$$-\mathfrak{q}\lambda\bar{\mathfrak{q}} = -c^2 E\bar{E}\,\Delta\varepsilon - c^2 H\bar{H}\,\Delta\mu + 2\varkappa S\Delta\bar{\mathfrak{q}}$$

liefert. Geht man jetzt zum 11-Element, beachtet die Vertausch-

1) Minkowski [α], Formel (91).

2) Bei Minkowski [α] S. 43 der Vektor „N“, den er in Ermangelung geeigneter Bezeichnungen durch seine Komponenten N_k (mit je 12 Gliedern) erklärt.

barkeit von λ, ε, μ, $\varkappa$ und Δ und berücksichtigt (72) und (113), so wird:

$$\frac{\lambda}{2} \cdot \alpha \Delta \varepsilon - \beta \Delta u + \frac{\varkappa}{c^2} (S \Delta \bar{\mathfrak{q}})_{11}$$

oder, wenn man λ und Δ durch ihre obigen Werte ersetzt und bemerkt, daß nach (52), (36), (7) und (80)

$$(S \Delta \bar{\mathfrak{q}})_{11} = (S \Delta \mathfrak{q})_{11} = - \sum_i S_i \Delta \mathfrak{q}_i = \sum_i S_{1i} (\mathfrak{q}_i \partial_k)$$
$$\cdot \sum_i S_{1i} (\bar{\mathfrak{q}} \partial)_{ik} = (S grad \mathfrak{q})_k$$

ist, wegen $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, ...

$$\mathfrak{t}_k = - \alpha (\partial \bar{\varepsilon})_k - \beta (\partial \bar{\mu})_k + \frac{\varkappa}{c^2} (S grad \mathfrak{q})_k .$$

Also gilt für $\mathfrak{t}$ die Umformung[1]):

$$\mathfrak{t} = - \mathfrak{a} + \frac{\varkappa}{c^2} S grad \mathfrak{q}; \tag{122}$$

und hierin ist $\mathfrak{a}$ der Vektor I. Art:

$$\mathfrak{a} = \alpha \, div \, \varepsilon + \beta \, div \, \mu. \tag{123}$$

Damit ist das erste Glied von $\mathfrak{f}$ bestimmt.

Für das *zweite* Glied von $\mathfrak{f}$, im wesentlichen $\partial (\varkappa \bar{\mathfrak{q}} S)$, lassen sich mehrere Umformungen angeben. Zunächst ist nach (90), (80) und (50):

$$\partial (\varkappa \bar{\mathfrak{q}} S) = (div \, \varkappa \mathfrak{q}) S + \varkappa \mathfrak{q} (\partial S). \tag{124}$$

Je nachdem man hier nun für $\mathfrak{q} \partial S$ nach (62), (71) und (73)

$$c \dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}} \frac{dS}{dt}^{2})$$

schreibt oder diese Größe nach (80) und mit Hilfe der aus $S \bar{\mathfrak{q}} = 0$ (105) oder $(S \bar{\mathfrak{q}} \partial) = 0$ nach (90) und (50) hervorgehenden Gleichung $S (\bar{\mathfrak{q}} \partial) + \mathfrak{q} (S \partial) = 0$ in

$$\mathfrak{q} (\partial S) - \mathfrak{q} (S \partial) + \mathfrak{q} (S \partial) = \mathfrak{q} \, rot \, S - S \, grad \, \mathfrak{q}$$

umformt, erhält man verschiedene Bestimmungen für das zweite Glied. Verwenden wir die letzte Umformung und setzen alles in die Hauptgleichung (120) ein, so erhalten wir als eine gesuchte *Darstellung für die Viererkraft* $\mathfrak{f}$ den Ausdruck:

1) Minkowski (α, Formel 92) hat diese Umformung (wieder nur in Komponenten dargestellt) ohne Beweis angegeben.

2) $\frac{d}{dt}$ = substantieller Differentialquotient.

$$\text{(125)} \qquad \mathfrak{f} = -\mathfrak{s}\mathfrak{F} - \mathfrak{a} + \frac{1}{c^2}(div\, \varkappa \mathfrak{q})\, S + \frac{1}{c^2}\varkappa \mathfrak{q}\, rot\, S,$$

auf den wir uns weiter unten stützen wollen.

Wir bemerken noch, daß man die Größe $(div\, \varkappa \mathfrak{q})S$ in (124) nach (51) und einem oben erwähnten hydrodynamischen Satz (vgl. 85) leicht in

$$\frac{1}{dV}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varkappa dV}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\right)\cdot S$$

umformen kann, worin dV das unendlich kleine mit der Materie mitbewegte Volumen bezeichnet, und daß damit das zweite Glied von $\mathfrak{f}$ auf die Form

$$\text{(126)} \qquad \partial(\varkappa \bar{\mathfrak{q}} S) = \frac{1}{dV}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varkappa dV}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}} S\right)$$

gebracht werden kann. Bei der Bildung der ponderomotorischen Kraft $\mathfrak{f}_1 dV = \mathfrak{F}_r dV \ldots$ auf das materielle Element erscheint alsdann der rechtsstehende Klammerausdruck gleichsam als eine *Impulsgröße*.

Ferner läßt sich die Viererkraft auch aus (117) nach (118) und (80) gewinnen, wenn man linksseitig mit $-\partial$ multipliziert und außer (91) noch die leicht einzusehenden Formeln:

$$\begin{aligned}\partial(\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}) &= (\partial\bar{\mathfrak{a}})\mathfrak{b} + \mathfrak{a}(\bar{\partial}\mathfrak{b}) \\ &= (div\ \mathfrak{a})\mathfrak{b} + \mathfrak{a}(grad\ \mathfrak{b})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial(\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}})_{11} &= [(\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}})_{11}\partial] = (\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{b}}\partial) = \\ &= \mathfrak{a}(\bar{\mathfrak{b}}\partial) + \mathfrak{b}(\bar{\mathfrak{a}}\partial) = \\ &= \mathfrak{a}\, grad\, \mathfrak{b} + \mathfrak{b}\, grad\, \mathfrak{a}\end{aligned}$$

berücksichtigt, in der $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebige Vektoren I. Art sind. Man erhält dadurch die ponderomotorischen Kräfte allein durch die Minkowskischen Vektoren E, H, S ausgedrückt.

Art. 23. Explizite Darstellung der ponderomotorischen Kraft in besonderen Fällen.

Durch Komponentenbildung erhalten wir aus (125) gemäß (119) *die allgemeinen dreidimensionalen Ausdrücke für die ponderomotorische Kraft* $\mathfrak{F}$. Wir beschränken uns jedoch nur auf besondere Fälle.

Im *reinen Vakuum*, wo allenthalben $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ und $\varkappa = \varepsilon\mu - 1 = 0$ ist, reduziert sich $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{f} = -\mathfrak{s}\mathfrak{F}$ und liefert, da nach (103) $\mathfrak{J}$ verschwindet und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ identisch wird, nach (96), (97) und (34) den dreidimensionalen Vektor

$$\mathfrak{F} = \varrho\left\{\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{H}\right]\right\}$$

als ponderomotorische Kraft. Er ist in der Tat in der Elektronentheorie üblich.

Ferner für einen *homogenen isotropen sich gleichförmig geradlinig bewegenden Körper* (ε, μ, $\varkappa$, $\mathfrak{v}$ konstant) verschwindet der Vektor $\mathfrak{t}$, und aus (120), (121) und (124) folgt als Viererkraft der Ausdruck:

$$\mathfrak{f} \quad -\mathfrak{s}\mathfrak{F} + \frac{\varkappa}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\,\frac{dS}{dt}\,,$$

der in dreidimensionaler Form und vektoriell nach (96), (97), (34):

$$\mathfrak{F} = \varrho\left\{\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}, \mathfrak{B}\right]\right\} + \frac{1}{c}[\mathfrak{J}, \mathfrak{B}] + \frac{\varkappa}{c^2\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}\,\frac{d\mathfrak{W}}{dt}$$

lautet, wenn man unter $\mathfrak{W}$ nach Minkowski den Raumvektor mit den Komponenten S_1, S_2, S_3 versteht. *Die ponderomotorische Wirkung setzt sich daher aus 4 Teilen zusammen, dem elektrostatischen Einfluß, dem Einfluß des Feldes auf den Leitungsstrom* $\mathfrak{J}$ *nach Biot-Savart*[1]*, dem entsprechenden auf den Konvektionsstrom* $\varrho\mathfrak{v}$ *und einem von* $\frac{d\mathfrak{W}}{dt}$ *herrührenden unbekannten Einfluß.* Auch wenn unser Körper *dauernd* ruht, wodurch $\mathfrak{W}$ nach (104) in $\mathfrak{S}$ übergeht und die ponderomotorische Wirkung also durch

$$\mathfrak{F} = \varrho\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{J}, \mathfrak{B}] + \frac{\varkappa}{c}\,\frac{d}{dt}\,[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$$

ausgedrückt ist, bleibt der letzte Einfluß bestehen. Daher sind die früheren Ansätze, in denen nur die beiden ersten Glieder auftreten, durch ein Glied[2]) zu ergänzen, das der *zeitlichen* Veränderung des elektromagnetischen Feldes Rechnung trägt (induzierte ponderomotorische Kraft).

Im Gegensatz hierzu steht die von Minkowski definierte ponderomotorische Kraft. Er erklärt sie (in unserer Schreibweise) durch die drei ersten Komponenten des Vektors I. Art:

1) Genauer: nach der Umkehr des Biot-Savartschen Gesetzes.

2) Man vergleiche die Abrahamsche ([9] S. 45) „Zusatzkraft“ zu den Minkowskischen Bewegungsgleichungen.

$$\mathfrak{f} = (div\, M)\left(1 + \frac{\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}}{c^2}\right)^{1)},$$

der sich in unserem Fall des dauernd ruhenden homogenen isotropen Körpers nach (121), (122), (123) und (94) auf $\mathfrak{f} = \mathfrak{s}^0 \mathfrak{F}^0 (1 + \bar{\nu}\nu)$ oder nach (95) und (97) auf

$$\mathfrak{f} = -\mathfrak{s}^0 \mathfrak{F}^0 - \mathfrak{s}^0. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathfrak{E}_x^0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{E}_y^0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{E}_z^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

reduziert. Faßt man hier die drei ersten Komponenten zusammen, für welche das zweite Glied keinen Beitrag liefert, so folgt für die Minkowskische ponderomotorische Kraft in der Tat nur der Ausdruck:

$$\mathfrak{F} = \varrho \mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{J}, \mathfrak{B}],$$

d. h. *bei Minkowski fehlt die „induzierte" ponderomotorische Wirkung.*

Art. 24. Die Berechnung und Bedeutung der Energie Q.

Um die Größe Q[2]) zu erhalten, multiplizieren wir den allgemeinen Ausdruck von $\mathfrak{f}$ (125) rechtsseitig mit $\bar{\mathfrak{q}}$: dabei fallen die beiden letzten Glieder nach (105) und (57) fort und es bleibt:

$$\mathfrak{f}\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{s}\mathfrak{F}\bar{\mathfrak{q}} + \mathfrak{a}\bar{\mathfrak{q}}.$$

Zur Entfernung des Viererstroms $\mathfrak{s}$ multiplizieren wir linksseitig mit der Identität $c^2 = -(\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}})_{11}$ (72), berücksichtigen (51), addieren rechts die nach (57) verschwindende Matrix $\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{q}\mathfrak{F}\bar{\mathfrak{q}})$ und setzen für den auftretenden Faktor $\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{s} - \bar{\mathfrak{s}}\mathfrak{q}$ nach (41) und (99) den Sechserstrom $\mathfrak{C}$. Dies gibt:

$$-c^2\mathfrak{f}\bar{\mathfrak{q}} = -\mathfrak{q}\mathfrak{C}\mathfrak{F}\bar{\mathfrak{q}} + c^2\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{q}}.$$

Mit Hilfe des oben (102—104) durch $-cJ = \mathfrak{q}\mathfrak{C}$ erklärten Ruhleitungsstromes J und der elektrischen Ruhkraft E folgt hieraus unter Bildung des 11-Elementes und mit Rücksicht auf (119), (74) und (52) die Gleichung:

---

1) Minkowski ([α] S. 44) schreibt „$K + \frac{1}{c^2}(\mathfrak{q}\overline{K})\mathfrak{q}$", wovon der im Text gegebene Ausdruck bereits eine Umformung ist. Die Matrix „K" ist unsere Matrix *div M*.

2) Wir berechnen sie in voller Allgemeinheit, nicht, wie bei Laue ([ε] S. 167), unter Annahme konstanter Körpergeschwindigkeit.

$$\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}} = (J\bar{E})_{11} + \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{v}_x + \mathfrak{a}_2\mathfrak{v}_y + \mathfrak{a}_3\mathfrak{v}_z - \mathfrak{a}_4 c}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}},$$

in der jedes Glied nach (49) invariant ist; *d. h. die Energie Q transformiert sich nach der Relation*

$$Q = Q^0 \sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}} \tag{127}$$

und die Größe

$$\gamma = (J\bar{E})_{11} = J_1E_1 + J_2E_2 + J_3E_3 - J_4E_4 \tag{128}$$

ist gleich ihrem Ruhwert $\mathfrak{J}_x\mathfrak{E}_x + \mathfrak{J}_y\mathfrak{E}_y + \mathfrak{J}_z\mathfrak{E}_z$, der Jouleschen Wärme. Wir nennen daher γ die „Ruhwärme“. In unsere Hauptgleichung

$$Q = \gamma\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}} + (\mathfrak{a}_1\mathfrak{v}_x + \mathfrak{a}_2\mathfrak{v}_y + \mathfrak{a}_3\mathfrak{v}_z - \mathfrak{a}_4 c)$$

setzen wir nun die aus (123) hervorgehenden Komponenten

$$\mathfrak{a}_1 = \alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \beta\frac{\partial\mu}{\partial x}, \ldots$$

$$\mathfrak{a}_4 = -\alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial u} - \beta\frac{\partial\mu}{\partial u}$$

ein und fassen die Glieder mit α und β für sich zusammen. Man findet:

$$Q = \gamma\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}} + \alpha\frac{d\varepsilon}{dt} + \beta\frac{d\mu}{dt}, \tag{129}$$

wobei $\frac{d}{dt}$ die zeitliche Aenderung bezeichnet, die man erhält, wenn man der betrachteten materiellen Stelle $(x\,y\,z\,t)$ in ihrer Bahn folgt. Damit ist der *allgemeine Ausdruck für* die in (119) auftretende Energie *Q ermittelt.*

Ihre *Bedeutung* ergibt sich aus der Betrachtung der einzelnen Glieder. Den Hauptbestandteil von Q bildet das erste Glied, da man zeitliche Aenderungen der Dielektrizitätskonstanten ε und der Permeabilität μ nicht anzunehmen pflegt. Dieses Glied reduziert sich im Fall der Ruhe ($\mathfrak{v} = 0$) auf $\gamma^0 = (\mathfrak{J}^0\mathfrak{E}^0)$, d. h. auf die Joulesche Wärme im Ruhsystem, und kann daher als *der allgemeine Ausdruck für die Joulesche Wärme r betrachtet werden.* Wir setzen also:

$$r = \gamma\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\,. \tag{130}$$

Da γ invariant ist, so transformiert sich r wie Q (s. 127).

Zur *expliziten* Bestimmung von r berechnen wir die in γ (128) auftretende Matrix JE. Nach der Definition von J und E (102—104) ist sie gleich $-\frac{1}{c^2}\mathfrak{q}\mathfrak{C}\mathfrak{F}\bar{\mathfrak{q}}$ oder, da $\mathfrak{q}\mathfrak{C}^*$ oder $\mathfrak{C}^*\bar{\mathfrak{q}}$ verschwindet (101), gleich $-\frac{1}{c^2}\mathfrak{q}(\mathfrak{C}\mathfrak{F}-\mathfrak{F}^*\mathfrak{C}^*)\bar{\mathfrak{q}}$. Wegen der Vertauschbarkeit der Klammergröße (40) und wegen (72) und (40) wird ihr 11-Element:

$$\gamma=\mathfrak{C}\mathfrak{F}-\mathfrak{F}^*\mathfrak{C}^*=\Sigma(\mathfrak{C}_4\mathfrak{F}_4-\mathfrak{C}_1\mathfrak{F}_1).$$

Setzt man nun hier die Komponenten von J und $\mathfrak{F}$ aus (100) und (97) ein, so folgt nach leichten Umformungen für *die Joulesche Wärme* nach (130) in Uebereinstimmung mit Laue[1]) *der Ausdruck*:

$$r=\left(\mathfrak{J},\mathfrak{E}+\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\mathfrak{B}\right]\right). \tag{131}$$

Die beiden übrigen Glieder von Q hängen von den zeitlichen Veränderungen der Körperkonstanten ε und μ ab und weisen daher auf innere (molekulare) Vorgänge im Körper hin, deren Wesen jedoch infolge der unerforschten Natur von ε und μ noch unbekannt ist. *Demnach hat Q im wesentlichen*[2]) *die Bedeutung der Jouleschen Wärme.*

Art. 25. Analogien zwischen vier- und dreidimensionalen Größen der Elektrodynamik.

Die oben (102—104) eingeführten Vierervektoren[3]) E, H, S; D, B, J und die Invariante γ[3]) verhalten sich in der Relativitätstheorie genau so wie die entsprechenden dreidimensionalen Größen: die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}$; $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{J}$ und das skalare Produkt $(\mathfrak{J}\mathfrak{E})$ in der Maxwellschen Theorie. So entsprechen den hier geltenden Relationen

$$\begin{aligned}
&D=\varepsilon E,\\
&B=\mu H,\\
&J=\sigma E,\\
&S=[\mathfrak{q}EH],\\
&S\perp E \text{ und } H,\\
&\gamma=J_1E_1+J_2E_2+J_3E_3-J_4E_4 \quad .
\end{aligned}$$

1) Laue [ε] S. 167.

2) Vgl. Laue ([ε] S. 166, Fußnote). Unsere Formel (129) liefert ein Maß für jene Energie.

3) Sie sind durch die Vorsilbe „Ruh“ von den zugehörigen Maxwellschen Größen unterschieden.

die ehedem gültigen Angaben:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H},$$
$$\mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],$$
$$\mathfrak{S} \perp \mathfrak{E} \text{ und } \mathfrak{H},$$
$$(\mathfrak{J}\mathfrak{E}) = \mathfrak{J}_x \mathfrak{E}_x + \mathfrak{J}_y \mathfrak{E}_y + \mathfrak{J}_z \mathfrak{E}_z$$

und es gehen die neuen Beziehungen beim Uebergang zur Ruhe genau in die alten über. Demnach sind $E, \ldots, \gamma$ die einfachsten Größen, welche sich für die relativtheoretische Beschreibung der Elektrodynamik ponderabler Körper eignen. Wir haben uns ihrer im Vorhergehenden vielfach bedient. Von diesen vierdimensionalen Größen finden sich bei Minkowski die Vierervektoren E, H und S (mit Φ, Ψ, Ω bezeichnet) und bei Laue[1]) die aus den drei ersten Komponenten von E, H, D und B gebildeten, mit $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$-multiplizierten Raumvektoren (mit $\mathfrak{E}^x$, $\mathfrak{H}^x$, $\mathfrak{D}^x$, $\mathfrak{B}^x$ bezeichnet), ferner der Vierervektor $\frac{1}{c} J$ (mit Λ bezeichnet) und die Invariante r (130) (mit Q bezeichnet).

b) Die Lewis-Wilsonsche reelle Vektoranalysis.

Art. 26. Erklärung der Lewis-Wilsonschen Einheitsvektoren $k_{a\ldots}$ durch Matrizen.

Die Lewis-Wilsonsche vierdimensionale Vektoranalysis kennt drei Arten von Vektoren: „Einser-“, „Zweier-“ und „Dreier-“vektoren mit entsprechend vier, sechs und vier Komponenten. Die zugehörigen *Einheitsvektoren* $k_{a\ldots}$ längs der Koordinatenachsen (k_1, k_2, k_3, k_4), der Koordinatenebenen $(k_{23}, k_{31}, k_{12}, k_{14}, k_{24}, k_{34})$ und der Koordinatenräume $(k_{234}, k_{314}, k_{124}, k_{123})$ dienen zur Komponentendarstellung[2]) dieser Vektoren:

I. $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 k_1 + \mathfrak{a}_2 k_2 + \mathfrak{a}_3 k_3 + \mathfrak{a}_4 k_4,$

II. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{23} k_{23} + \mathfrak{A}_{31} k_{31} + \mathfrak{A}_{12} k_{12} + \mathfrak{A}_{14} k_{14} + \mathfrak{A}_{24} k_{24} + \mathfrak{A}_{34} k_{34},$

III. $A = A_{234} k_{234} + A_{314} k_{314} + A_{124} k_{124} + A_{123} k_{123}.$

Hieraus werden formal nach den Regeln der Algebra unter Innehaltung der Faktorenfolge bei den Einheitsvektoren *innere* $(\cdot)$ und

1) Laue [ε] S. 149, 150; 145; 167.
2) Wilson [ι] S. 448.

äußere ($\times$) *Produkte* der $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}$, A gebildet, wobei die entsprechenden Produkte der Einheitsvektoren nach den zum Teil willkürlich festgesetzten Regeln [1]):

$$k_1 \cdot k_1 = 1,\ k_1 \cdot k_4 = 0, \ldots k_4 \cdot k_4 = -1,$$
$$k_1 \cdot k_{14} = -k_4,\ k_4 \cdot k_{124} = -k_{12},\ k_{14} \cdot k_{14} = -1,$$
$$k_{14} \cdot k_{124} = -k_2,\ k_{124} \cdot k_{124} = -1, \ldots;$$
$$k_1 \times k_2 = k_{12},\ k_1 \times k_{23} = k_{123},\ k_1 \times k_{234} = k_{1234},$$
$$k_4 \times k_{142} = 0,\ k_{12} \times k_{43} = -k_{1234}, \ldots$$

zu ermitteln sind. Diese Regeln bilden den wesentlichsten Bestandteil der Lewis-Wilsonschen Analysis. — *Es läßt sich nun zeigen, daß sich die Einheitsvektoren k_a, k_{ab}, k_{abc} und der „Einheitspseudoskalar“ k_{abcd} durch Matrizen mit reellen Elementen und die beiden Arten von Produkten durch Kombinationen dieser Matrizen derart erklären lassen, daß vorstehende Regeln sämtlich erfüllt sind.* Daß man die Einheitsvektoren nicht als höhere komplexe Zahlen [2]) (mit mehr als zwei Einheiten) deuten kann, folgt aus dem Nichtbestehen des assoziativen Gesetzes bei den inneren Produkten. — Unsere Aufgabe läßt nun in der Tat unendlich viele Lösungen zu. Wir erhalten solche folgendermaßen: *Wir erklären k_1 durch die Matrix*

$$k_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

mit den reellen Zahlen α_i und analog k_2, k_3, k_4 durch gleichgeformte Matrizen mit den Zahlen β_i, γ_i, δ_i und fordern, daß die aus diesen Zahlen gebildete Matrix

$$M = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

die Determinante 1 hat und der Bedingung

$$M\,\overline{M} = 1$$

genügt. Diese Forderung besagt, daß die Zahlen $\alpha_i, \cdots$ den Gleichungen $\sum \alpha_i^2 = 1$, $\sum \alpha_i \beta_i = 0$, $\cdots$ $\sum \delta_i^2 = -1$ oder, was dasselbe ist, daß die Matrizen k_i den Bedingungen $(k_1 \bar{k}_1)_{11} = 1$, $(k_1 \bar{k}_2)_{11} = 0$,

1) Wilson [4] S. 430 ff.
2) Enzykl. der math. Wiss. I A 4.

$\cdots (k_4 \bar{k}_4)_{11} = -1$ genügen. Setzen wir zur Abkürzung die aus zwei beliebigen Einheitsvektoren k_a und k_b gebildete Diagonalmatrix

$$(k_a \bar{k}_b)_{11} = (ab), \tag{132}$$

so lauten diese Bedingungen einfacher:

$$(11) = 1, \ (12) = 0, \ \ldots, \ (44) = -1. \tag{133}$$

Die oben definierten Matrizen $k_a, k_b, \cdots k_u \cdots$, in denen die Indizes $a, b, \ldots u, \ldots$ irgendwelche der vier Zahlen $1, 2, 3, 4$ sind, bezeichnen wir kurz mit $a, b, \ldots, u, \ldots$ und benützen sie zur *Erklärung der übrigen Einheitsgrößen* $k_{ab}, \cdots$, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} k_{ab} &= [a, b]\ ^{1}), \\ k_{abc} &= [a, b, c]\ ^{1}), \\ k_{abcd} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{134}$$

wo rechts der Reihe nach eine alternierende Matrix, eine von der Form (19) und eine Diagonalmatrix, gebildet aus der genannten Determinante, stehen; dabei stimmen die Größen a_i, b_i, c_i, d_i mit irgend einer Anordnung der vier Größen α_i, β_i, γ_i, δ_i überein. Nach vorstehender Erklärung (134) ist also z. B.

$$\begin{aligned} k_{12} &= [k_1, k_2], \ \ldots \\ k_{123} &= [k_1, k_2, k_3], \ \ldots \\ k_{1234} &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = 1, \\ k_{2134} &= \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = -1, \ \ldots \end{aligned}$$

Damit sind sämtliche Einheitsvektoren $k_a \ldots$ durch Matrizen bestimmt; für sie bestehen nach (134) und (41), (24) in Uebereinstimmung mit Lewis und Wilson die Relationen:

$$k_{12} = -k_{21}, \ k_{123} = -k_{132}, \cdots k_{1234} = -k_{2134}, \cdots$$

1) Diese Matrizen sind in (41) bzw. (22) erklärt.

Durch *Kombinationen* der eingeführten Matrizen haben wir nun die inneren $(\cdot)$ und äußeren $(\times)$ Produkte für die $k_a \ldots$ zu definieren. *Die* (kommutativen) *inneren Produkte erklären wir durch die Matrizenausdrücke:*

$$(135)\quad \left\{\begin{array}{l} k_a \cdot k_b = (ab), \\ k_a \cdot k_{bc} = -a[bc], \\ k_a \cdot k_{bcd} = -[a,[bcd]]^*, \\ k_{ab} \cdot k_{cd} = [ab]^*[cd]^* - [cd][ab], \\ k_{abc} \cdot k_{uv} = [abc][uv]^*, \\ k_{abc} \cdot k_{uvw} = -([abc]\overline{[uvw]})_{11} \end{array}\right.$$

und die äußeren (zum Teil kommutativen) *Produkte durch:*

$$(136)\quad \left\{\begin{array}{l} k_a \times k_b = -k_b \times k_a = [ab], \\ k_a \times k_{bc} = k_{bc} \times k_a = a[bc]^*, \\ k_a \times k_{bcd} = -k_{bcd} \times k_a = (a\overline{[bcd]})_{11}, \\ k_{ab} \times k_{cd} = k_{cd} \times k_{ab} = [ab]^*[cd] + [cd]^*[ab]. \end{array}\right.$$

Alsdann sind durch diese Festsetzungen sämtliche Bedingungen der Lewis-Wilsonschen Einheitsvektoren $k_a \ldots$ erfüllt.

Um dies wenigstens in einzelnen Fällen zu erweisen, geben wir den vorstehenden Matrizenausdrücken zunächst *eine einfachere Form.* Dazu bedürfen wir außer der Identität (58) noch einer anderen: Sei $\mathfrak{A}$ eine alternierende Matrix, so ist nach (40) die Matrix

$$\varrho = [ab]^*\mathfrak{A}^* - \mathfrak{A}[ab]$$

eine Diagonalmatrix. Multiplizieren wir also linksseitig mit a, wobei das erste Glied rechts nach (45) und (24) verschwindet, und beachten (41), so können wir $\varrho a = -a\mathfrak{A}(\bar{a}b - \bar{b}a)$ oder nach (57) und (51) $\varrho a = (a\mathfrak{A}\bar{b})_{11} a$ schreiben. Da diese Gleichung für beliebige a nur gilt, wenn die ersten Matrizenfaktoren übereinstimmen, so folgt daraus ϱ, und es besteht daher die *Identität* [1]*:*

$$(137)\qquad [ab]^*\mathfrak{A}^* - \mathfrak{A}[ab] = (a\mathfrak{A}\bar{b})_{11}.$$

Es wird nun von den vier Ausdrücken in (136) der erste nach (134) gleich k_{ab}, der zweite nach (45) und (134) gleich k_{abc}, der dritte nach (52), (23) und (134) gleich k_{abcd} und der vierte nach (31) und (137) für $\mathfrak{A} = -[cd]^*$ gleich $-(a[cd]^*\bar{b})_{11}$ oder durch Trans-

1) Eine weitere folgt, wenn man die Faktoren der beiden ersten Glieder umstellt.

ponieren und nach (45) gleich $([bcd]\bar{a})_{11}$ oder, wie beim dritten, gleich k_{abcd}. Also ist in der Tat:

$$k_a \times k_b = k_{ab}\,,\; k_a \times k_{bc} = k_{abc}\,,$$
$$k_a \times k_{bcd} = k_{ab} \times k_{cd} = k_{abcd}\,,$$

wie bei Lewis-Wilson.

Ferner wird von den fünf letzten Ausdrücken in (135) der erste nach (41), (51) und (132) gleich $b\,(ac) - c\,(ab)$, der zweite nach (45) gleich $-\,[a, b\,[cd]^*]^*$ oder nach der Identität (58) für $\mathfrak{A} = [cd]$ gleich $(a\bar{b})_{11}[cd] - [b, a[cd]]$, d. h. (wie beim ersten) gleich $(ab)\,[cd] + (ac)\,[db] + (ad)\,[bc]$, der dritte nach der Identität (137) für $\mathfrak{A} = [cd]$ gleich $(a\,[cd]\bar{b})_{11}$ oder (wie beim ersten) gleich $(ac)\,(bd) - (ad)(bc)$, der vierte nach (45) und (46) gleich $c[ab]^*[uv]^*$ oder nach der Identität (137) für $\mathfrak{A} = [uv]$ gleich $c[uv][ab] + c(a[uv]\bar{b})_{11}$, d. h. (wie beim ersten und dritten) gleich $[(bu)\,(cv) - (bv)(cu)]\,a + \cdots$ und der fünfte nach (45) und (46) gleich $([abc][uv]^*\bar{w})_{11}$ oder mit Hilfe des vierten gleich $[(bu)(cv) - \cdots](a\bar{w})_{11} + \cdots$, d. h. nach (132) gleich $[(bu)(cv) - (bv)(cu)](aw) + \cdots$. Demnach lauten unter Anwendung von Determinanten die Gleichungen (135) übersichtlicher:

$$(138)\quad \left\{\begin{array}{l} k_a \cdot k_b = (ab), \\ k_a \cdot k_{bc} = \left\{\begin{matrix} k_b & k_c \\ (ab) & (ac) \end{matrix}\right\}, \\ k_a \cdot k_{bcd} = (ab)\,k_{cd} + (ac)\,k_{db} + (ad)\,k_{bc}\,, \\ k_{ab} \cdot k_{cd} = \left\{\begin{matrix} (ac) & (bc) \\ (ad) & (bd) \end{matrix}\right\}, \\ k_{abc} \cdot k_{uv} = \left\{\begin{matrix} k_a & k_b & k_c \\ (au) & (bu) & (cu) \\ (av) & (bv) & (cv) \end{matrix}\right\} \quad \text{und} \\ k_{abc} \cdot k_{uvw} = \left\{\begin{matrix} (au) & (bu) & (cu) \\ (av) & (bv) & (cv) \\ (aw) & (bw) & (cw) \end{matrix}\right\}, \end{array}\right.$$

wo die wellenförmigen Striche anzeigen sollen, daß die Determinantenelemente Matrizen bedeuten.

Hiernach ist nun, wenn man (133) beachtet, in der Tat:

$$k_1 \cdot k_{14} = \left\{\begin{matrix} k_1 & k_4 \\ (11) & (14) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} k_1 & k_4 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\} = -\,k_4\,,$$
$$k_4 \cdot k_{124} = (41)\,k_{24} + (42)\,k_{41} + (44)\,k_{12} = -\,k_{12}\,, \cdots$$

wie bei Lewis-Wilson.

Unsere Aufgabe ist damit erledigt; *es ergibt sich hieraus die Widerspruchslosigkeit der Lewis-Wilsonschen Regeln.* — Es bleibt nur noch die Bestimmung der Matrix M aus $M\overline{M} = 1$ übrig. Da (56) eine Lösung dieser Gleichung ist, so können wir daraus die Elemente für die $\alpha_i, \beta_i, \cdots$ entnehmen und also die Einheitsvektoren durch die Matrizen:

$$k_1 = \begin{vmatrix} \frac{2}{\alpha}p_1^2+1 & \frac{2}{\alpha}p_1p_2 & \frac{2}{\alpha}p_1p_3 & \frac{2}{\alpha}p_1p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \ldots$$

erklären, wobei nach (55)

$$\alpha = p_4^2 - (p_1^2+p_2^2+p_3^2)$$

ist. Die einfachste Lösung ergibt sich für $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $p_4 = 1$. Alsdann erhält man für $k_1, \cdots$ die Matrizen:

$$k_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, k_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \ldots, k_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und daraus nach (134) und (23) für $k_{234}, k_{314}, \ldots k_{123}$, wie die Ausrechnung zeigt, genau dieselben Matrizen. Dieser Umstand besagt, daß es *nicht erforderlich ist, Vektoren III. Art* (wie A) *besonders einzuführen*, da sie sich ganz wie Vektoren I. Art behandeln lassen.

Literatur.

α) H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Gött. Nachr. (1908) S. 53—111; od. Math. Ann. 68 (1910) S. 472—525; od. Ges. Abh. II. S. 352—404; od. als Sonderdruck unter dem Titel „Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik". Leipzig 1910. (Zitate beziehen sich auf den Sonderdruck.)

β) H. Minkowski, Vortrag (80. Naturforscher-Vers. zu Köln) über „Raum und Zeit" (1908); oder Jahresbericht d. d. Math.-Ver. 18, S. 75; od. Phys. Zeitschr. 10, S. 104, 1909; auch als Sonderdruck erschienen, Leipzig, Teubner, 1909.

γ) A. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie I. und II. Ann. d. Phys. 32, 749, 1910; 33, 649, 1910.

δ) G. Herglotz, Ueber die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkt der Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. (4) 36, 497, 1911.

ε) M. Laue, Das Relativitätsprinzip, 2. Aufl. Braunschweig 1913.

ζ) A. v. Brill, Das Relativitätsprinzip, Jahresber. d. d. Math.-Ver. 21, S. 60.

η) A. v. Brill, Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen. Leipzig, Teubner, 1909.

ϑ) M. Abraham, Sull' Elettrodinamica di Minkowski. Rend. Circ. Mat. di Palermo XXX, 1910, S. 33—46.

ι) B. Wilson, N. Lewis, The space-time manifold of relativity. Proc. Am. Acad. 48, N. 11, 1912, S. 389—507.

κ) E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik I, 1. Leipzig, Teubner, 1910.